

# Phänomenologische Modellierung des temperaturabhängigen Verhaltens piezoelektrischer Stapelaktoren

Dissertation am Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



Am Fachbereich Maschinenbau  
der Technischen Universität Darmstadt

zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte

## **Dissertation**

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Robert Köhler**

aus Darmstadt

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. S. Rinderknecht
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. H. Hanselka

Tag der Einreichung:	04.02.2013
Tag der mündlichen Prüfung:	08.05.2013

Darmstadt 2013



---

## Vorwort

---

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet „Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau“ der Technischen Universität Darmstadt.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den in ihr ausdrücklich genannten Hilfen, selbständig verfasst habe.

Mein besonderer Dank gilt den Herren Prof. Dr.-Ing. R. Nordmann, welcher das Fachgebiet leitete als ich meine Tätigkeit begann sowie seinem Nachfolger Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Rinderknecht, bei welchem ich meine Arbeit abschließen durfte. Insbesondere möchte ich mich für die gewährten Freiräume und das entgegengebracht Vertrauen bei der Bearbeitung meiner Projekte sowie die zahlreichen richtungsweisenden Hinweise bedanken.

Herrn Prof. Dr.-Ing H. Hanselka, Leiter des Fachgebietes „Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik“, danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Außerdem möchte ich die Förderung durch das EU-Projekt DREAM (validation of Radical Engine Architecture systems) erwähnen, welches die wesentlichen zu beantwortenden Fragen aufwarf. Insbesondere geht mein Dank an den Projektpartner Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG für die stets hervorragende und konstruktive Zusammenarbeit.

Darüber hinaus geht mein Dank an die Deutsche Forschungsgemeinschaft, welche durch ihre finanzielle Unterstützung den Abschluss dieser Arbeit ermöglichte.

Ein herzlicher Dank geht auch an die zahlreichen Kollegen am Fachgebiet, welche ein sehr angenehmes Arbeitsklima schufen, dass ich sicher vermissen werde.

Ein besonderer Dank geht an Markus Marszolek für die Konstruktion des in diese Arbeit verwendeten Prüfstandes sowie an Torben Meier und Matthias Borsdorf für die Korrektur meines Manuskripts.

Meinen Eltern danke ich für die stete Unterstützung während des Studiums und den darauf folgenden Jahren. Bei meiner Lebensgefährtin Franziska bedanke ich mich für den großen Rückhalt sowie für die aufbauenden Worte, wenn es mal nicht so rund lief.

Ober-Ramstadt, im Januar 2013

Robert Köhler





---

# Inhaltsverzeichnis

---

VORWORT .....	III
INHALTSVERZEICHNIS .....	V
ABBILDUNGSVERZEICHNIS .....	VIII
TABELLENVERZEICHNIS .....	XI
SYMBOLVERZEICHNIS .....	XI
<b>1 EINLEITUNG .....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation.....	1
1.2 Ziele der Arbeit .....	3
1.3 Lösungsansatz .....	3
1.4 Gliederung der Arbeit.....	4
<b>2 GRUNDLAGEN .....</b>	<b>5</b>
2.1 Physikalische Grundlagen der Piezoelektrizität.....	5
2.1.1 Lineare Dielektrika .....	5
2.1.2 Piezoelektrizität.....	7
2.1.3 Pyroelektrizität .....	8
2.1.4 Ferroelektrizität.....	8
2.2 Lineare Grundgleichungen piezoelektrischer Materialien.....	9
2.3 Kristallstruktur und Aufbau von PZT-Keramiken.....	12
2.4 Makroskopisches Großsignalverhalten von PZT-Keramiken .....	13
2.4.1 Elektrisch induzierte Schaltprozesse .....	13
2.4.2 Mechanisch induzierte Schaltprozesse .....	16
2.5 Aufbau piezoelektrischer Stapelaktoren.....	16
2.6 Unipolares Großsignalverhalten .....	18
2.6.1 Einfluss der Temperatur.....	19
2.6.2 Einfluss der Vorspannung .....	20
2.6.3 Zeitabhängige Effekte .....	22
2.6.4 Energetische Interpretation der Messwerte .....	24
2.7 Ansätze zur Modellierung piezoelektrischer Keramiken .....	25
2.7.1 Anforderungen an das mathematische Hysteresemodell.....	26
2.7.2 Aktormodellierung unter Verwendung des Preisach-Hysteresemodells.....	27
2.7.3 Aktormodellierung unter Verwendung des Prandtl-Ishlinskii Modells.....	29
2.7.4 Aktormodellierung unter Verwendung des Maxwell-Slip Modells.....	30
2.7.5 Aktormodellierung unter Verwendung von Differentialgleichungen .....	31
2.7.6 Weitere mathematische Ansätze zur Aktormodellierung .....	32
2.8 Begründung der Verwendung des Preisach-Hysteresemodells.....	33

2.9	Grundlagen des klassischen Preisach-Hysteresemodells .....	33
2.10	Verluste in Piezoaktoren und Eigenerwärmung .....	40
2.11	Thermische Modellierung von Stapelaktoren .....	41
2.12	Die Methode der Finiten Elemente .....	46
2.13	Optimierungsalgorithmen.....	48
<b>3</b>	<b>PRÜFSTANDSUMGEBUNG UND MESSMETHODEN .....</b>	<b>51</b>
3.1	Prüfstandsaufbau .....	51
3.1.1	Betriebsmodi des Prüfstandes .....	52
3.2	Aufbau der untersuchten Prüflinge .....	53
3.3	Erfassung des axialen Wärmestromes .....	54
3.4	Messabweichungen .....	55
3.4.1	Systematische Messfehler.....	55
3.5	Bestimmung linearer Kleinsignalkennwerte .....	56
3.5.1	Resonante Messmethode.....	56
3.5.2	Berlincourt Methode .....	58
3.6	Bestimmung linearer Großsignalparameter .....	58
3.7	Bestimmung thermischer Modellparameter .....	60
3.7.1	Verlustleistungsregelung.....	60
<b>4</b>	<b>EXPERIMENTELLE ERGEBNISSE .....</b>	<b>63</b>
4.1	Kleinsignalmesswerte .....	63
4.2	Großsignalmesswerte .....	69
4.2.1	Lineare Großsignalparameter.....	69
4.2.2	Gegenüberstellung der Großsignalhysterese.....	76
4.2.3	Großsignalverluste.....	77
4.3	Messungen der Eigenerwärmung.....	80
<b>5</b>	<b>MODELLBILDUNG DES STAPELAKTORS .....</b>	<b>83</b>
5.1	Piezoelektrisches Aktormodell .....	83
5.1.1	Definition der Modellanforderungen.....	83
5.1.2	Modellierungsansatz .....	84
5.1.3	Erweiterung des piezoelektrischen Aktormodells um nichtlineare Effekte .....	85
5.1.4	Erweiterung des Modells um die Temperaturabhängigkeit .....	87
5.2	Thermisches Aktormodell .....	89
5.2.1	Umsetzung des thermischen Modells in Simulink.....	93
<b>6</b>	<b>IDENTIFIKATION DER MODELLPARAMETER.....</b>	<b>97</b>
6.1	Piezoelektrisches Teilmodell.....	97
6.1.1	Korrektur des niederfrequenten Kriechens .....	97
6.1.2	Abspaltung der nichtlinearen Anteile .....	100
6.1.3	Ermittlung der Everett-Flächen .....	101

6.2	Thermisches Aktorteilmodell .....	103
6.2.1	Inverses Problem bei der Bestimmung thermischer Modellparameter.....	103
6.2.2	Analytische Abschätzung der thermischen Modellparameter .....	105
6.2.3	Durchführung der Optimierung .....	108
<b>7</b>	<b>ERGEBNISSE DER PARAMETERIDENTIFIKATION.....</b>	<b>111</b>
7.1	Parameter des piezoelektrischen Modellteils.....	111
7.2	Parameter des thermischen Aktormodellteils .....	113
<b>8</b>	<b>MODELLVALIDIERUNG .....</b>	<b>117</b>
8.1	Validierung des piezoelektrischen Modellteils.....	117
8.1.1	Modellgüte der Temperaturabhängigkeit .....	117
8.1.2	Einfluss der linearen Modellparameter.....	118
8.1.3	Modellgüte bei unregelmäßigen Signalen .....	121
8.2	Validierung des thermischen Modellteils .....	124
8.3	Kritische Hinterfragung des gewählten Modellansatzes .....	127
<b>9</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....</b>	<b>131</b>
9.1	Gegenüberstellung von Ergebnissen und Zielen.....	131
9.2	Ausblick .....	133
	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>135</b>
<b>ANHANG A</b>	<b>MESSTECHNIK UND KALIBRIERUNG .....</b>	<b>A.1</b>
Anhang A.1	Einfluss der endlichen Prüfstandssteifigkeit .....	A.1
Anhang A.2	Kalibrierung der Temperatursensoren.....	A.3
Anhang A.3	Kalibrierung des Ladungsverstärkers.....	A.3
Anhang A.4	Kalibrierung von Kraftaufnehmer, Wegsensorik & Leistungsmessung .....	A.5
<b>ANHANG B</b>	<b>MESSWERTE.....</b>	<b>B.1</b>
Anhang B.1	Messung der Eigenerwärmung.....	B.1
<b>ANHANG C</b>	<b>LEBENS LAUF.....</b>	<b>C.1</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

---

Abbildung 1.1 Lösungsansatz für ein thermoelektromechanisches Aktormodell. ....	3
Abbildung 2.1 Form der Polarisations- und Dehnungshysterese beim Anlegen eines bi- beziehungsweise unipolaren elektrischen Feldes [39]. ....	15
Abbildung 2.2 Schematische Darstellung des Domänenschaltzustands im a) ungeladenen Zustand, b) Sättigungszustand und c) im geladenen Zustand bei $E=0$ , [37]. ....	15
Abbildung 2.3 Schematischer Aufbau eines Hochvolt-Stapelaktors. ....	17
Abbildung 2.4 Unipolares Großsignalverhalten eines Piezostapelaktors bei unterschiedlichen Temperaturen [22]. ....	20
Abbildung 2.5 Unipolares Großsignalverhalten eines Piezostapelaktors bei unterschiedlichen mechanischen Vorspannungen [22]. ....	21
Abbildung 2.6 Einfluss des niederfrequenten Kriechverhaltens auf das Aktorverhalten: a) Eingangssignal b) elektrische Flussdichte c) Dehnung. ....	22
Abbildung 2.7 Frequenzabhängigkeit am Beispiel eines der untersuchten Aktoren (PIC 255). ....	23
Abbildung 2.8 Elementare Hystereseeoperatoren: a) Relais-Operator, b) Play-Operator, c) Stop- Operator [57], [58]. ....	27
Abbildung 2.9 Ein einzelnes Hysteron, elementarer Baustein des Preisach-Hysteresemodells [35].	34
Abbildung 2.10 Überlagerung einer unendlichen Anzahl von Hysteronen [35]. ....	35
Abbildung 2.11 Geometrische Interpretation des Preisach-Hysteresemodells. ....	36
Abbildung 2.12 a) geometrische Aufteilung der Integrationsfläche in Trapeze und Dreiecke b) Darstellung von Integralwerten über Trapezflächen durch Integrale über Dreiecksflächen.	37
Abbildung 2.13 Zusammenhang zwischen Verlustarbeit und Verlustleistung. ....	39
Abbildung 2.14 Schematische Schnittdarstellung eines Stapelaktors. ....	45
Abbildung 3.1 Prüfstand zur experimentellen Untersuchung von Piezostapelaktoren bei erhöhten Umgebungstemperaturen (Temperaturkammer ist in der Abbildung demontiert). ....	52
Abbildung 3.2 a) Foto eines Prüflings b) schematische Schnittdarstellung eines Prüflings. ....	54
Abbildung 3.3 Schematische Darstellung der Verlustleistungsregelung. ....	61
Abbildung 4.1 Mit der resonanten Messmethode ermittelte Kleinsignalparameter von PIC 151, PIC 181 und PIC 255. ....	63
Abbildung 4.2 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 151. ....	65
Abbildung 4.3 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 181. ....	66
Abbildung 4.4 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 255. ....	67
Abbildung 4.5 Vermutetes Globalverhalten der piezoelektrischen Ladungskonstanten hinsichtlich Temperatur und Vorspannung bei Verwendung der Berlincourt Methode. ....	68
Abbildung 4.6 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 151. ....	70
Abbildung 4.7 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 181. ....	70
Abbildung 4.8 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 255. ....	71

Abbildung 4.9 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 151. ....	72
Abbildung 4.10 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 181. ....	72
Abbildung 4.11 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 255. ....	73
Abbildung 4.12 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante von PIC 151.....	74
Abbildung 4.13 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante von PIC 181.....	74
Abbildung 4.14 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante von PIC 255.....	75
Abbildung 4.15 Vergleich der Großsignalhysterese der drei untersuchten Materialien. ....	77
Abbildung 4.16 Großsignalverluste von PIC 151 in Abhängigkeit von der Temperatur, der Vorspannung und der Umgebungssteifigkeit. ....	78
Abbildung 4.17 Großsignalverluste von PIC 181 in Abhängigkeit von der Temperatur, der Vorspannung und der Umgebungssteifigkeit. ....	79
Abbildung 4.18 Großsignalverluste von PIC 255 in Abhängigkeit von der Temperatur, der Vorspannung und der Umgebungssteifigkeit. ....	80
Abbildung 4.19 a) Zugeführte Wärme und Wärmeströme über die Aktoraufstandsflächen b) Ausgewählte Temperaturen (PIC 255). ....	81
Abbildung 4.20 Aufteilung der Wärmeabfuhr im stationären Zustand in Abhängigkeit von der zugeführten Heizleistung. ....	82
Abbildung 5.1 Schematische Darstellung des zur Modellierung der Temperaturabhängigkeit verwendeten Superpositionsansatzes. ....	88
Abbildung 5.2 Vergleich eines werksneuen Aktors mit einem benutzten und einem defekten. ....	90
Abbildung 5.3 Übersicht über die verwendeten Randbedingungen des 2D-Modells.....	92
Abbildung 5.4 a) geschichteter Aufbau des Aktors b) repräsentative Teilelemente des Aktors c) Richtungsabhängige Abstraktion durch Wärmeleitwiderstände. ....	93
Abbildung 6.1 Messrohdaten einer zur Identifikation verwendeten Messreihe. ....	97
Abbildung 6.2 Vom Kriecheffekt bereinigte Messwerte. ....	98
Abbildung 6.3 Ermittlung der Ladung aus dem Stromsignal. ....	99
Abbildung 6.4 Aufspaltung der Messwerte in linearen und nichtlinearen Anteil.....	101
Abbildung 6.5 Vorgehensweise bei der Ermittlung der Everett-Flächen.....	102
Abbildung 6.6 Zusammenhang zwischen Messwerten und Integralwerten. ....	103
Abbildung 6.7 Optimierungsaufgabe zum Lösen des inversen Problems.....	104
Abbildung 6.8 Abgeschätzte Materialparameter als Funktion des volumetrischen Kleberanteils in der Elektrodenschicht.....	107
Abbildung 6.9 Abgeschätzte Wärmeübergangskoeffizienten als Funktion der mittleren Wandtemperatur.....	108
Abbildung 7.1 Vergleich zweier experimentell ermittelter Everett-Flächen eines Aktors aus PIC 255 Material gemessen bei einer Aktortemperatur von 20 °C und 140 °C. ....	111
Abbildung 7.2 Koeffizienten zur Bestimmung des nichtlinearen Anteils der Längenänderung aus dem nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte. ....	112
Abbildung 7.3 Visualisierung des Zusammenhangs zwischen nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte und der Aktorlängenänderung für unterschiedliche Aktortemperaturen . ....	113

Abbildung 7.4 Ergebnis der Parameterschätzung des thermischen Aktormodell aus stationären Simulationen.....	114
Abbildung 7.5 Wärmekapazitäten der untersuchten Aktoren. ....	115
Abbildung 8.1 Validierung der Temperaturmodellierung. ....	118
Abbildung 8.2 Vergleich von Simulation und Messung bei der Verwendung linearer Kleinsignalparameter und abweichender Umgebungssteifigkeit.....	119
Abbildung 8.3 Vergleich von Simulation und Messung bei der Verwendung linearer Großsignalparameter und abweichender Umgebungssteifigkeit.....	120
Abbildung 8.4 Vergleich von Messung und Simulation bei mehrfrequenter Anregung.....	122
Abbildung 8.5 Vergleich der simulierten und gemessenen Aktorleistung.....	124
Abbildung 8.6 Vergleich zwischen simulierter und gemessener Eigenerwärmung eines Aktors aus PIC 151 Material. ....	126
Abbildung 8.7 Vergleich zwischen simulierter und gemessener Eigenerwärmung eines Aktors aus PIC 255 Material. ....	127
Abbildung 9.1 Blockschaltbild einer mechatronischen Gesamtsystemsimulation am Beispiel eines aktiv gelagerten Flugtriebwerksrotors. ....	132

#### **Abbildungen im Anhang:**

Abbildung A.1 a) 2D-Modell des Prüfstandes b) Deformation in Y-Richtung bei 100 N und 70000-facher Vergrößerung. ....	A.1
Abbildung A.2 Vergleich zwischen realem E-Modul des Prüflings und dem experimentell bestimmten E-Modul. ....	A.2
Abbildung Anhang A.3 a) Vergleich der unkalibrierten Sensoren b) Messabweichungen nach der Kalibrierung der Sensoren. ....	A.3
Abbildung Anhang A.4 Schaltplan zum Kalibrieren des Ladungsverstärkers. ....	A.4
Abbildung Anhang A.5 Kalibrierkurve des Ladungsverstärkers für die Berlincourt Messung. ....	A.5
Abbildung Anhang B.1 Aufheizvorgang eines Aktors auf PIC 151 Material.....	B.1
Abbildung Anhang B.2 Aufheizvorgang eines Aktors auf PIC 181 Material.....	B.1

---

## Tabellenverzeichnis

---

Tabelle 2.1 Literaturwerte piezoelektrischer Materialien entnommen aus [33]. .....	11
Tabelle 6.1 Materialparameter der Komponenten eines Stapelaktors. ....	106
Tabelle 7.1 Angenommene Messfehler der einzelnen Sensoren bzw. Messgrößen.....	115

### Tabellen im Anhang:

Anhang Tabelle A.1 Kapazität des Messkondensators im Ladungsverstärker in Abhängigkeit von der Frequenz und der Amplitude (Gemessen mit HP 4284A).....	A.4
Anhang Tabelle A.2 Kapazität des Eichkondensators in der Probeschaltung in Abhängigkeit von der Frequenz und der Amplitude (Gemessen mit HP 4284A).....	A.4

---

## Symbolverzeichnis

---

### Lateinische Formelzeichen

$A_e$	Elektrodenfläche	$m^2$
$A_{ss}$	Systemmatrix des thermischen Aktormodells	-
$A_c$	Stirnfläche des Aktors	$m^2$
$A_{el,ges}$	Gesamtelektrodenfläche	$m^2$
$A_i \ i = 1,2$	Oberflächen der strahlenden Körper	$m^2$
$A_{konv}$	Fläche des konvektiven Wärmeübergangs	$m^2$
$B_{ss}$	Eingangsmatrix des thermischen Aktormodells	-
$C_{12}$	Strahlungsaustauschzahl	$W/(m^2K^4)$
$c_c$	Wärmekapazität der Keramik	$J/(kgK)$
$C_{cw}$	Curie-Weiss Konstante	$K$
$c_e$	Wärmekapazität des Elektrodenmaterials	$J/(kgK)$
$C_{E,i}$	Integrationskonstanten des Einheitselements	-
$c^{E,T}$	spezifische Wärmekapazität der Keramik	$J/(kgK)$
$C_{ss}$	Ausgangsvektor des thermischen Aktormodells	-
$c_k$	Wärmekapazität der Klebers	$J/(kgK)$
$c_{m,ges}$	mittlere Wärmekapazität des Aktor	$J/(kgK)$
$C_s$	Strahlungszahl	$W/(m^2K^4)$
$D_{ss}$	Durchgangsmatrix des thermischen Aktormodells	-

$D$	elektrische Flussdichte	$C/m^2$
$D_{3,lin}$	linearer Anteil der elektrischen Flussdichte $D$	$C/m^2$
$D_{3,nl}$	nichtlinearer Anteil der elektrischen Flussdichte $D$	$C/m^2$
$D_a$	Durchmesser des Aktors	$m$
$\Delta l$	Längenänderung des Aktors	$m$
$\Delta l_{nl}$	nichtlinearer Anteil der Längenänderung	$m$
$D_i$	elektrische Flussdichte	$C/m^2$
$d_{ij}$	piezoelektrische Ladungskonstante	$C/N$
$D_{\Theta_i}$	elektrische Flussdichte simuliert bei Temperatur $\Theta_i$	$C/m^2$
$d_z$	Durchmesser des Zylinders	$m$
$E_{ch}$	elektrische Ladung	$C$
$E_i$	elektrisches Feld	$V/m$
$e_i \ i = 1 \dots 3$	Amplituden des angelegten elektrischen Feldes	$V/m$
$e_{ij}^{\Theta}$	piezoelektrischer Modul	$C/m^2$
$F$	Kraft	$N$
$f$	Frequenz	$1/sec$
$F_l$	Lastvektor des thermischen Aktormodells	$W$
$F_0$	statische Vorspannkraft	$N$
$F_{(\alpha,\beta)}$	Integral über das Teildreieck $T_{p(\alpha,\beta)}$	-
$fit$	Wert für Modellgüte	%
$F_{opt,ges}$	Zielfunktionswert eines Simulationsdurchlaufes	$K$
$F_{opt,k}$	Zielfunktionswert der k-ten Einzelsimulation	$K$
$F_{soll}$	Sollkraft des Lastaktors	$N$
$Gr$	Grashof-Zahl	-
$H$	Enthalpie	$J/kg$
$h_c$	Dicke der Keramikschicht	$m$
$h_e$	Dicke der Elektrode	$m$
$h_{e,k}$	Dicke des Kleber-Elektroden-Gemischs	$m$
$h_k$	Schichtdicke des Klebers	$m$
$i$	elektrische Stromstärke	$A$
$i_{sim}$	simulierte elektrische Stromstärke	$A$



$j$	komplexe Einheit	-
$J_e$	Jacoby Determinante der Transformation	-
$k$	piezoelektrischer Koppelfaktor	-
$K$	Steifigkeitsmatrix des thermischen Aktormodells	W/K
$k_i \ i = 1..5$	Koeffizienten zur Berechnung von $S_{3,nl}e$	$(m^2/C)^{5-i}$
$k_{soll}$	Sollsteifigkeit des Prüfstands	N/m
$l_a$	aktive Aktorlänge	m
$l_c$	Anströmlänge	m
$l_s$	Dicke einer Keramikschicht	m
$L_{(\tau)}$	Kontur zwischen $S_+$ und $S_-$	V/m
$l_z$	Länge des Zylinders	m
$M$	Massenmatrix des thermischen Aktormodells	J/K
$M_j m_j$	Koordinaten der Kontur $L_{(\tau)}$	V/m
$n$	Anzahl der Keramikschichten	-
$n_{loss}$	Anzahl Verlustleistungsstufen	-
$NRMSE$	Normierter mittlere quadratischer Fehler	-
$n_{sens}$	Anzahl der Temperatursensoren	-
$Nu$	Nusselt-Zahl	-
$Nu_{e,konv}$	Nusselt-Zahl für erzwungene Konvektion	-
$Nu_{fe,konv}$	Nusselt-Zahl bei Mischkonvektion	-
$Nu_{f,konv}$	Nusselt-Zahl für freie Konvektion	-
$Nu_{lam}$	Nusselt-Zahl bei laminarer Strömung	-
$Nu_{turb}$	Nusselt-Zahl bei turbulenter Strömung	-
$P$	Polarisation	C/m <sup>2</sup>
$P_{(\tau)}$	Momentanleistung	W
$p_i^T$	pyroelektrischer Koeffizient	C/(Km <sup>2</sup> )
$Pr$	Prandtl-Zahl	-
$p_{s,i}$	primärer pyroelektrischer Koeffizient	C/(Km <sup>2</sup> )
$P_{sim}$	simulierte Momentanleistung	C/(Km <sup>2</sup> )
$P_{V,soll}$	Sollwert der Verlustleistung	W
$P_{V,istl}$	Istwert der Verlustleistung	W

$\dot{q}$	Wärmezufuhr pro Volumen	$W/m^3$
$\dot{q}_{\Theta i}$	simulierte spez. Verlustleistung bei $\Theta_i$	$W/m^3$
$Q_{D(S_+)}$	mit Fläche $S_+$ verbundene piezoelektrische Verlustarbeit	$Ws$
$Q_H$	Verlustarbeit beim Schalten eines Hysterons	$W$
$Q_{loss}$	Verlustarbeit	$W$
$Q_{(\Omega)}$	mit Fläche $\Omega$ verbundene Verlustarbeit	$Ws$
$\dot{q}$	spezifische Wärmequelle	$W/m^3$
$\dot{q}_r$	Wärmestrom über die radiale Mantelfläche	$W/m^2$
$\dot{q}_z$	Wärmestrom über die Aktoraufstandsflächen	$W/m^2$
$\dot{Q}_g$	zugeführte Heizleistung	$W$
$\dot{Q}_t$	abgeführte Heizleistung	$W$
$Q_{S_+}$	mit Fläche $S_+$ verbundene Verlustarbeit	$Ws$
$Q_{SW}$	Verlustarbeit eines Schaltvorganges	$W$
$Q_{trans}$	abgeführte Heizleistung	$W$
$r$	radiale Koordinate in Zylinderkoordinaten	$m$
$Ra$	Rayleigh-Zahl	-
$Re$	Reynolds-Zahl	-
$r_e$	mittlerer Elementradius	$m$
$r_0$	Obere Begrenzungsfunktion	-
$R_{th}$	thermischer Ersatzwiderstand	$K/W$
$r_u$	untere Begrenzungsfunktion	-
$S_-$	Bereich der deaktivierten Hysterone	-
$S_+$	Bereich der aktivierten Hysterone	-
$S_{3,lin}$	linearer Anteil der Aktordehnung	$C/m^2$
$S_{3,nl}$	nichtlinearer Anteil der Aktordehnung	$C/m^2$
$S_i$	Dehnung des Aktors	-
$s_{\lambda\mu}^{\Theta,E}$	piezoelektrische Elastizitätskonstante	$m^2/N$
$S_{\Theta i}$	Aktordehnung simuliert bei Temperatur $\Theta_i$	-
$T_0$	mechanische Aktorvorspannung	$N/m^2$
$T_i$	mechanische Spannung	$N/m^2$
$T_p$	Preisachfläche	-

$U$	spezifische innere Energie	$J/m^3$
$u$	elektrische Spannung	$V$
$u$	Eingangswert eines Operators	-
$u_{l,max}$	lokales Maximum des Eingangssignal	-
$u_{l,min}$	lokales Minimum des Eingangssignals	-
$u_{pyro}$	pyroelektrische Spannung	$V$
$V_{eff}$	elektrisch aktiviertes Aktivvolumen	$m^3$
$w$	verrichtete Arbeit	$Ws$
$w_1, w_2$	Gewichte zur Modellüberbelendung	-
$w_{el}$	elektrische Arbeit	$Ws$
$W_{loss,avg}$	mittlerer Verlustarbeit pro Periode	$Ws$
$w_{mech}$	mechanische Arbeit	$Ws$
$W_{mess}(\bar{\tau})$	gemessene elektrische Arbeit	$Ws$
$w_p$	Verlustarbeit einer Hystereseschleife	$Ws$
$W_{SE}$	Fläche der S-E Hysterese	$V/m$
$x$	Weg	$m$
$x_m$	wahrer Wert der Messgröße	-
$y$	Ausgangswert eines Operators	-
$y_A$	Anzeigewerte eines Messgerätes	-
$y_{nom}$	nomineller Sensorwert	-
$y_{offset}$	Sensorwert mit Offset	-
$z$	axiale Koordinate in Zylinderkoordinaten	$m$

### Griechische Formelzeichen

$a_\alpha$	1. Koeffizient des Polynoms für $\alpha_{ges}$	$W/m^2$
$\alpha$	Koordinate der Preisachfläche $T_p$	$V/m$
$\alpha_{konv}$	konvektiver Wärmeübergangskoeffizient	$W/(m^2K)$
$\alpha_j^E$	thermischer Ausdehnungskoeffizient	$1/K$
$\alpha_{e,konv}$	Wärmeübergangskoeffizient der erzwungenen Konvektion	$W/(m^2K)$
$\alpha_{f,konv}$	Wärmeübergangskoeffizient der freien Konvektion	$W/(m^2K)$
$\alpha_{ges}$	mittlerer gesamt Wärmeübergangskoeffizient	$W/(m^2K)$

$\alpha_{konv}$	Wärmeübergangskoeffizient der Konvektion	$W/(m^2K)$
$\alpha_{m,konv}$	Wärmeübergangskoeffizient bei Mischkonvektion	$W/(m^2K)$
$\alpha_{rad}$	Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung	$W/(m^2K)$
$b_\alpha$	2. Koeffizient des Polynoms für $\alpha_{ges}$	$W/(m^2K)$
$\beta$	Koordinate der Preisachfläche $T_p$	$V/m$
$\Delta\theta_m$	mittlere Wandtemperatur	$K$
$\Delta x_m$	Messabweichung	-
$\Delta x_s$	systematischer Messfehler	-
$\Delta x_z$	zufällige Messfehler	-
$\epsilon_0$	Permittivität des Vakuums	$C/(Vm)$
$\epsilon_{s1}$	Emissionszahl der Strahlung	-
$\epsilon_r$	relative Permittivität	-
$\epsilon_r^S$	relative Permittivität bei konstanter Dehnung $S$	-
$\epsilon_r^T$	relative Permittivität bei konstanter Spannung $T$	-
$\epsilon^*$	komplexe Dielektrizitätskonstante	$C/(Vm)$
$\epsilon'$	Realteil der komplexen Permittivität $\epsilon^*$	$C/(Vm)$
$\epsilon''$	Imaginärteil der komplexen Permittivität $\epsilon^*$	$C/(Vm)$
$\gamma$	Volumenanteil Kleber	-
$\gamma_{\alpha\beta}$	Preisach-Hysteron	-
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$W/(mK)$
$\lambda_e$	Wärmeleitfähigkeit der Elektrode	$W/(mK)$
$\lambda_{ges,  }$	mittlere Wärmeleitfähigkeit parallel zur Elektrode	$W/(mK)$
$\lambda_{ges,\perp}$	mittlere Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Elektrode	$W/(mK)$
$\lambda_k$	Wärmeleitfähigkeit des Klebers	$W/(mK)$
$\lambda_{k,e}$	Wärmeleitfähigkeit Kleber-Elektroden-Gemisch	$W/(mK)$
$\mu_{(\alpha,\beta)}$	Preisachdichtefunktion	-
$\mu_{D_{3,nl}(\alpha,\beta)}$	Preisachdichtefunktion für $D_{3,nl}$	-
$v_i^T$	pyroelektrischer Modul	$m/V$
$\Omega$	Teilgebiet der Preisachfläche $T_p$	-
$\varphi_{12}$	Sichtfaktor der Strahlung	-
$\rho$	Dichte	$kg/m^3$

$\rho_c$	Dichte der Keramik	$kg/m^3$
$\rho_e$	Dichte der Elektrode	$kg/m^3$
$\rho_k$	Dichte des Klebers	$kg/m^3$
$\varphi$	Umfangskoordinate in Zylinderkoordinaten	$rad$
$\sigma$	Entropiedichte	$J/(Km^3)$
$\tau$	Zeit	$sec$
$\tan \delta$	piezoelektrischer Verlustfaktor	-
$\Theta$	Temperatur	$K$
$\Theta_{amb}$	Umgebungstemperatur	$K$
$\Theta_{avg}$	mittlere Aktortemperatur	$K$
$\Theta_c$	Curie-Temperatur	$K$
$\Theta_{end}$	Temperatur der Aktoraufstandsfläche	$K$
$\Theta_i$	Temperatur der Parameteridentifikation	$K$
$\Theta_{mess}$	Messwert eines Temperatursensors	$K$
$\Theta_{surf}$	Wandtemperatur	$K$
$\Theta_w$	Wandtemperatur	$K$
$\Theta_f$	Fluidtemperatur	$K$
$\xi_{\mu}^E$	thermoelastischer Ausdehnungsmodul	$m^2/N$



---

# 1 Einleitung

---

Diese Arbeit befasst sich mit der Modellierung piezoelektrischer Stapelaktoren, welche in Anwendungen des Maschinenbaus zunehmend an Bedeutung gewinnen. Abschnitt 1.1 fasst grundlegende Hintergrundinformationen zusammen, aus welchen sich die Motivation dieser Arbeit ergibt. Ausgehend von dieser werden in Abschnitt 1.2 die angestrebten Ziele abgeleitet. Abschnitt 1.3 zeigt den gewählten Lösungsansatz und Abschnitt 1.4 erläutert die Gliederung der Arbeit.

---

## 1.1 Motivation

---

Die ersten Anwendungen von piezoelektrischen Materialien finden sich bei Sonaranlagen zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Hier werden die piezoelektrischen Materialien zur Erzeugung von Ultraschallimpulsen angewendet. Die ersten funktionsfähigen Systeme waren mit Quarzkristallen ausgerüstet [1]. Das Streben nach leistungsfähigeren Anlagen beeinflusste maßgeblich die Entwicklung der noch heute üblichen piezoelektrischen Keramiken wie Blei-Zirkonat-Titanat (PZT). Ziviler Ableger der vorwiegend aus dem militärischen Bereich stammenden Forschung zu Sonaranalgen sind die bildgebenden Ultraschallgeräte [2] in der Medizintechnik.

Um eine möglichst große Schallemission zu erhalten, werden die piezoelektrischen Materialien bei Ultraschallanwendungen meist in oder nahe ihrer elektromechanischen Resonanz betrieben. Dann ergeben sich bereits bei relativ niedrigen elektrischen Feldstärken große Auslenkungen. Dieses Prinzip wird auch bei den heute weit verbreiteten Ultraschallmotoren benutzt, welche es in einer Vielzahl von Bauformen gibt [3], [4]. Grundsätzlich wird die piezoelektrische Keramik so angesteuert, dass sich eine Wander- oder Wellenbewegung ergibt, welche über einen Reibkontakt zu einer translatorischen oder rotatorischen Bewegung führt. Diese Antriebe fanden bereits Einzug in die Großserienproduktion, zum Beispiel als Stellmotor in Kameraobjektiven.

Ein weiteres Anwendungsfeld piezoelektrischer Aktoren ist die Nanopositioniertechnik [5],[6]. Ohne piezoelektrische Positioniersysteme sind z. B. so genannte Rastersondenmikroskope nicht denkbar. Bei diesen wird die Oberfläche des Untersuchungsobjekts mit einer Messspitze abgetastet, wobei punktwise die Interaktion zwischen Messspitze und Oberfläche messtechnisch erfasst wird. Anschließend wird aus der Messspitzenposition und den jeweiligen Messwerten ein Bild der Oberfläche erzeugt. Es ist offensichtlich, dass hierbei die Positioniergenauigkeit unmittelbar Einfluss auf die erzielbare „Bildqualität“ hat. Charakteristisch für Nanopositionierungsaufgaben sind hohe, statische elektrische Felder. Lediglich kleinste Störungen müssen kompensiert werden, was zu geringen dynamischen Signalanteilen führt.

Auch in Maschinenbauanwendungen kommen zunehmend piezoelektrische Aktoren zum Einsatz. Haupteinsatzpunkt sind hier hochdynamische Ventile [7], welche eine sehr genaue Dosierung bei gleichzeitiger hoher Arbeitsfrequenz ermöglichen. In diese Klasse gehören auch moderne Direkteinspritzsysteme für Dieselmotoren [8], welche mittlerweile in Großserie eingesetzt werden. Charakteristisch für industrielle Anwendungen sind hohe elektrische Felder bei erhöhten

---

Ansteuerfrequenzen, wobei diese stets sehr deutlich unterhalb der Resonanzfrequenz der Aktoren liegen.

Zunehmend an Bedeutung gewinnt in den letzten Jahren die Schwingungsminderung aktiver Strukturen mittels piezoelektrischer Aktoren [9],[10]. Hierzu zählt auch die aktive Schwingungsminderung rotierender Maschinen. Pionierarbeit leistete hier Palazzolo [11],[12], welcher als erster eine aktive Lagerabstützung mit piezoelektrischen Stapelaktoren realisierte. In der Folge kam die Überlegung auf, die Rotoren von Flugtriebwerken aktiv zu dämpfen, um die bei Flugtriebwerken üblichen so genannten Quetschöldämpfer langfristig zu ersetzen [13], [14]. Bei Quetschöldämpfern handelt es sich um passive hydraulische Systeme, welche an den Lagerstellen der Rotoren verbaut sind. Diese weisen ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten auf und lassen sich mangels geeigneter analytischer oder numerischer Modelle nur schwer dimensionieren [15]. Ein Vergleich zwischen Quetschöldämpfern und aktiver Lagerabstützung mittels piezoelektrischer Aktoren an einem geeigneten Prüfstand findet sich in [16]. Ergebnis der Gegenüberstellung ist, dass eine aktive Lagerabstützung eine höhere Schwingungsminderung in einem weiteren Frequenzbereich als das konventionelle System ermöglicht. Kritisch zu bewerten ist jedoch, dass sich die Aktoren während der Messungen stark erwärmen, so dass eine Kühlung der Aktoren mit Luft notwendig ist. Dies ist insbesondere deshalb kritisch, da in Flugtriebwerken ohnehin erhöhte Temperaturen herrschen, welche die Wärmeabfuhr ohne zusätzliche Kühlmaßnahmen weiter limitieren. Auch bei modernen Dieseleinspritzsystemen ist die Eigenerwärmung der Aktoren eine kritische Größe [17]. Darüber hinaus ist davon auszugehen, dass sich erhöhte Aktortemperaturen negativ auf die Lebensdauer der Aktoren auswirken [18].

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass piezoaktive Systeme in Maschinenbauanwendungen ein hohes Potential aufweisen. Die Leistungsfähigkeit der Aktoren ist jedoch im Allgemeinen durch die Eigenerwärmung der Aktorkeramik beschränkt. Deshalb steht nur ein Bruchteil der kurzfristig abrufbaren Aktorleistung dauerhaft zur Verfügung. Bisher wird dieser Zusammenhang bei der Auslegung von Regelungsalgorithmen nicht berücksichtigt, so dass nicht a priori klar ist, ob ein Dauerbetrieb des Gesamtsystems möglich ist.

Darüber hinaus geht einer Änderung der Aktortemperatur eine Änderung der mechanischen und elektrischen Eigenschaften der Aktorkeramik einher [19]. Heutige Aktormodelle vernachlässigen diese Temperaturabhängigkeit in der Regel völlig, was je nach Anwendungsfall zu großen Modellierungsfehlern führen kann. Das Phänomen der Eigenerwärmung wurde bereits von mehreren Autoren behandelt wobei sich die Eigenerwärmung auf die für Piezoaktoren charakteristischen Hysteresephänomene zurückführen lässt [20],[21]. Alle bestehenden Untersuchungen beschränken sich jedoch auf die Beschreibung der reinen Eigenerwärmung. Rückschlüsse auf die elektromechanischen Eigenschaften des Aktors werden nicht gezogen. Aus diesem Problemkomplex leiten sich die Ziele dieser Dissertation ab. Es wird ein geeignetes Modell gesucht, welches sowohl das temperaturabhängige, nichtlineare Aktorverhalten beschreibt als auch eine Vorhersage der Eigenerwärmung ermöglicht. Ein solches Modell erlaubt eine thermische Dimensionierung piezoaktiver Systeme unter Berücksichtigung realer Regler und Lasten.



---

## 1.2 Ziele der Arbeit

---

Wie soeben erläutert, mangelt es an einem thermoelektromechanischen Aktormodell, welches es ermöglicht das nichtlineare Betriebsverhalten piezoelektrischer Stapelaktoren in dem für aktive Schwingungsminderung relevanten Betriebsbereich sowie die Eigenerwärmung des Aktors abzubilden. In dieser Arbeit soll ein solches Modell entwickelt werden. Dabei wird angestrebt das Modell so kompakt wie möglich zu halten, so dass eine Gesamtsystemsimulation von piezoaktiven Systemen mit vertretbarem Rechenaufwand möglich ist. Das Modell soll sowohl zur thermischen Dimensionierung der Aktoren als auch zur Validierung mittels linearer Systemtheorie entwickelter Regler dienen.

Darüber hinaus sind geeignete Methoden zur experimentellen Ermittlung der für das Modell relevanten Modellparameter zu entwickeln. Zur Ermittlung der Modellparameter ist der am Fachgebiet vorhandene Prüfstand [22] zu verwenden.

Abschließend ist das neue Modell mit Messwerten zu validieren. Der Gültigkeitsbereich und Anwendbarkeitsgrenzen des Modells sind herauszuarbeiten.

---

## 1.3 Lösungsansatz

---

Zur Modellierung des Aktors wird ein modularer Modellansatz angestrebt, welcher schematisch in Abbildung 1.1 dargestellt ist. Der piezoelektrische Modellteil übernimmt die Modellierung des nichtlinearen Aktorverhaltens. Er stellt einen hysteresebehafteten Zusammenhang zwischen zwei Eingangsgrößen (z. B. Aktorkraft und angelegter elektrischer Spannung) und den zwei verbleibenden den Aktorzustand beschreibenden Ausgangsgrößen (hier Dehnung und Ladung) her. Auf Basis der modellierten Hysterese sollen die Aktorverluste ermittelt werden. Zur Modellierung der Hysterese ist ein geeigneter Hystereseeoperator wie z. B. der Preisach-Hysteresee-Operator zu verwenden.

Der thermische Modellteil berechnet aus den vom piezoelektrischen Modellteil ermittelten Verlusten unter Berücksichtigung des Wärmeaustausches mit der Umgebung die Aktortemperatur. Diese soll in das piezoelektrische Aktorteilmodell zurückgeführt werden, um das temperaturabhängige Aktorverhalten abzubilden.

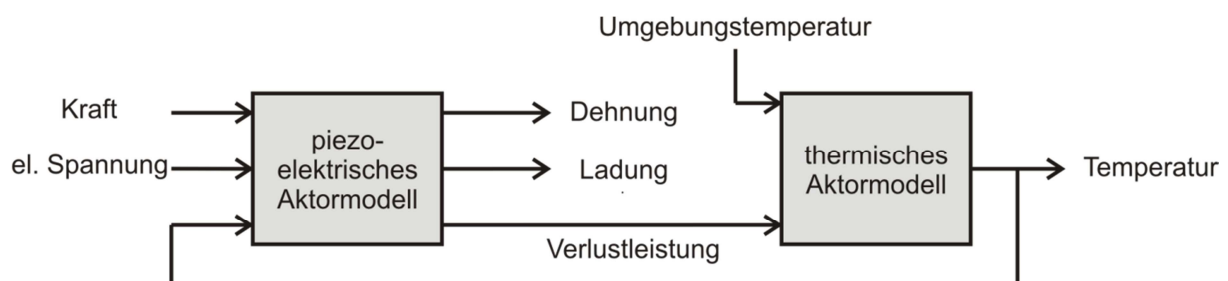


Abbildung 1.1 Lösungsansatz für ein thermoelektromechanisches Aktormodell.

---

## 1.4 Gliederung der Arbeit

---

In Kapitel 2 werden die zum Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen erläutert. Kapitel 3 beschreibt den am „Institut für Mechatronische Systeme“ zur Verfügung stehenden Prüfstand, welcher für den experimentellen Teil der Arbeit verwendet wurde. Kapitel 4 stellt einige experimentelle Ergebnisse dar. Basierend auf diesen Ergebnissen wird in Kapitel 5 ein Aktormodell abgeleitet. Kapitel 6 beschreibt die zur Identifikation der Modellparameter notwendigen Messungen und Identifikationsalgorithmen. In Kapitel 7 werden die ermittelten Modellparameter visualisiert. Anschließend folgt die Validierung des Aktormodells mittels Messdaten in Kapitel 8. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 9 ab.

---

## 2 Grundlagen

---

Dieses Kapitel fasst die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen zusammen. Die Unterkapitel 2.1 bis 2.4 erläutern allgemein die physikalischen Grundlagen piezoelektrischer Materialien. In Abschnitt 2.1 werden die bei piezoelektrischen Materialien auftretenden linearen Wechselwirkungen erläutert. Abschnitt 2.2 stellt die Herleitung der diese Wechselwirkungen beschreibenden Grundgleichungen dar. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 wird auf die speziellen Eigenschaften der für Piezostapelaktoren typischerweise verwendeten Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) Keramiken eingegangen. Abschnitt 2.5 erläutert den makroskopischen Aufbau dieser Stapelaktoren und Abschnitt 2.6 geht auf deren Betriebsverhalten ein.

Die Abschnitte 2.7 bis 2.9 befassen sich mit der Modellierung des Aktorverhaltens. Bisherige Ansätze zur Modellierung piezoelektrischer Materialien und Aktoren werden in Abschnitt 2.7 zusammengefasst. Zur Modellierung der Aktoren wird in dieser Arbeit das klassische Preisach-Modell verwendet (CPM). Eine Begründung dieser Auswahl wird in Abschnitt 2.8 gegeben.

Abschnitt 2.9 erläutert das CPM grundlegend.

Die Abschnitte 2.10 bis 2.12 befassen sich mit den thermischen Aspekten des Aktorverhaltens. In Abschnitt 2.10 wird auf die Modellierung der Aktorverluste eingegangen. Abschnitt 2.11 stellt Ansätze für ein thermisches Aktormodell vor. Um die, die Temperaturverteilung innerhalb des Aktors beschreibenden, partiellen Differentialgleichungen zu lösen, wird die Methode der Finiten Elemente (FEM) verwendet, welche in Abschnitt 2.12 erläutert wird. Zur Bestimmung der Modellparameter des thermischen Aktormodells wird ein Optimierungsverfahren angewendet. Dessen Funktionsweise wird in Abschnitt 2.13 erklärt.

---

### 2.1 Physikalische Grundlagen der Piezoelektrizität

---

Dieses Kapitel führt die grundlegenden Definitionen ein und erläutert die für Piezokeramiken wesentlichen linearen Wechselwirkungen. Für den physikalisch interessierten Leser sei auf die Bücher von Sonin und Strukow [23], von Jaffe und Cook [24] sowie von Ikeda [25] verwiesen.

---

#### 2.1.1 Lineare Dielektrika

---

Alle elektrisch nicht leitfähigen Materialien sowie insbesondere piezoelektrische Materialien weisen dielektrische Eigenschaften auf. Wird ein dielektrisches Material einem elektrischen Feld  $E$  ausgesetzt, so kommt es zu einer Verschiebung von elektrischen Ladungen innerhalb des Materials. Dieser Vorgang wird als Polarisierung bezeichnet. Die Menge aller Materialien, welche sich polarisieren lassen, wird als Dielektrika bezeichnet. Durch die Ladungsverschiebung entsteht ein sekundäres elektrisches Feld innerhalb des Materials, welches durch zusätzliche

Oberflächenladungen kompensiert wird. Diese Oberflächenladungen werden durch die elektrische Flussdichte  $D$  beschrieben

$$D = \frac{E_{ch}}{A_e} = \frac{1}{A_e} \int_{\tau_1}^{\tau_2} i \, d\tau = \epsilon_0 \epsilon_r E. \quad (2.1)$$

Hierin ist  $\epsilon_0$  die Permittivität des Vakuums und  $\epsilon_r$  eine dimensionslose materialspezifische Kennzahl. Durch Messen der beim Anlegen des elektrischen Feldes  $E$  bewegten Ladung  $E_{ch}$  bzw. durch zeitliches Integrieren der Stromstärke  $i$  des elektrischen Stromes lässt sich unter Berücksichtigung der durchfluteten Fläche  $A_e$  die Änderung der elektrischen Flussdichte messtechnisch erfassen. Bei piezoelektrischen Materialien hängt die Permittivitätszahl von der Orientierung des elektrischen Feldes relativ zur Polarisationsrichtung des Materials ab. Für welche Richtung der angegeben Koeffizient gültig ist, wird durch tiefgestellte Indizes definiert, welche der so genannten Voigtschen Notation [26] entsprechen. Die Indizes 1 und 2 stehen dabei für die beiden Richtungen senkrecht zur Polungsrichtung, der Index 3 steht für die Polungsrichtung. Diese Arbeit beschränkt sich auf piezoelektrische Stapelaktoren, welche nur mit elektrischen Feldern in Polungsrichtung beaufschlagt werden. Deshalb ist im Weiteren immer die 3 Richtung gemeint, wenn kein abweichender Index explizit angegeben ist.

Aufgrund der für piezoelektrische Materialien typischen elektromechanischen Kopplung hängen die Materialparameter stets von den beim Ermitteln des Materialparameters vorliegenden Rahmenbedingungen ab. Deshalb wird zwischen der Permittivität  $\epsilon_r^T$  bei konstanter mechanischer Spannung  $T$  und der Permittivität  $\epsilon_r^S$  bei konstanter mechanischer Dehnung  $S$  unterschieden. Welche Randbedingung während der Parameterermittlung konstant gehalten wurde, wird durch den hochgestellten Index definiert. Beide Materialkonstanten sind über den elektromechanischen Koppelfaktor  $k$  verknüpft [27]:

$$\epsilon_r^S = \epsilon_r^T (1 - k^2). \quad (2.2)$$

Typische Werte für das dimensionslose  $\epsilon_r^T$  liegen für Piezokeramiken in Polarisationsrichtung im Bereich von 1000 bis 3500. Beim Beaufschlagen von Dielektrika mit harmonischen elektrischen Feldern entstehen Verluste, welche sich als ein Phasenverzug zwischen dem elektrischen Feld  $E$  und der elektrischen Flussdichte  $D$  bemerkbar machen. Eine genauere Behandlung der Verlustmechanismen wird in Abschnitt 2.10 gegeben. Um diesen Sachverhalt mathematisch zu erfassen, ist die Verwendung einer komplexen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon^*$  üblich. Der einfach gestrichene Anteil  $\epsilon'$  beschreibt den inphasigen und der doppelt gestrichene Teil  $\epsilon''$  den außerphasigen Teil:

$$\epsilon^* = \epsilon' - j \epsilon''. \quad (2.3)$$

In Herstellerdatenblättern findet sich auch häufig der so genannte Verlustfaktor  $\tan \delta$

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}. \quad (2.4)$$

---

Dieser entspricht dem Tangens der Phasenverschiebung zwischen Ladung und angelegtem elektrischem Feld. Der Verlustfaktor  $\tan \delta$  ist stark von der Amplitude des elektrischen Feldes sowie schwach von der Frequenz abhängig [28].

---

### 2.1.2 Piezoelektrizität

---

Der Begriff Piezoelektrizität beschreibt eine lineare Wechselwirkung zwischen mechanischen und elektrischen Größen, welcher mit einer Ausnahme bei allen nicht zentrosymmetrischen Kristallklassen auftritt [25]. Ursache des Effekts ist dabei immer eine materialinterne Verschiebung von Ladungen. Die nicht zentrosymmetrischen Kristalle lassen sich weiter in polare und polar-neutrale Kristalle unterteilen.

Polare Kristalle besitzen bereits ohne mechanische Belastung eine eindeutige elektrische polare Richtung. Man spricht auch von einer so genannten spontanen Polarisation. Der piezoelektrische Effekt entsteht bei diesen Kristallen dadurch, dass sich diese spontane Polarisation durch eine externe mechanische Kraft ändert.

Polar-neutrale Kristalle besitzen mehrere gleichwertige polare Richtungen, welche sich im mechanisch spannungsfreien Zustand vollständig kompensieren. Erst durch die mechanische Deformation entstehen eine eindeutige polare Richtung und der aus der Ladungsverschiebung resultierende piezoelektrische Effekt.

Die verschobenen elektrischen Ladungen können makroskopisch als elektrische Flussdichte  $D$  erfasst werden. Diese Wechselwirkung zwischen mechanischer Spannung  $T$  und elektrischer Flussdichte  $D$  ist beschrieben durch

$$D_i = d_{ij} T_j. \quad (2.5)$$

Diese Wechselwirkung wird als direkter piezoelektrischer Effekt bezeichnet. Die tiefgestellten Indizes entsprechen erneut der Voigtschen Notation [26]. Des Weiteren wird die so genannte Einsteinsche Summenkonvention angewendet [29], das heißt, über gleiche Indizes wird summiert. Der Effekt ist umkehrbar, da durch das Anlegen eines elektrischen Feldes  $E$  intern Ladungen verschoben werden, welche eine makroskopische Dehnung  $S$  des Materials nach sich ziehen. Mathematisch wird der inverse piezoelektrische Effekt beschrieben durch

$$S_j = d_{ij} E_i. \quad (2.6)$$

Beide Effekte stehen in einem engen Zusammenhang. Dies wird vor allem dadurch deutlich, dass die Einträge des Proportionalitätstensor  $d_{ij}$  in den Gleichungen (2.5) und (2.6) betragsmäßig identisch sind. Dies lässt sich auch durch einfache thermodynamische Überlegungen belegen [30].

---

### 2.1.3 Pyroelektrizität

---

Beim Erwärmen eines polaren Kristalls lässt sich eine Änderung der Oberflächenladung beziehungsweise der elektrischen Flussdichte  $D$  feststellen. Bei konstanter mechanischer Spannung  $T$  gilt

$$D_i = p_i^T \Delta\theta, \quad (2.7)$$

wobei  $p_i^T$  der pyroelektrische Koeffizient bei konstanter mechanischer Spannung  $T$  und  $\Delta\theta$  die relative Temperaturänderung ist. Diese Änderung der Oberflächenladungen ist auf zwei physikalische Ursachen zurückzuführen. Zum einen tritt eine temperaturbedingte Änderung der spontanen Polarisierung auf. Dieser Effekt wird als primärer pyroelektrischer Effekt bezeichnet. Zum anderen ist mit einer Temperaturänderung immer eine Dehnung des Materials verbunden, welche in Verbindung mit dem piezoelektrischen Effekt zu einer zusätzlichen Ladungsverschiebung führt. Dieser Effekt wird sekundärer oder auch pseudopyroelektrischer Effekt genannt. Deshalb setzt sich die Konstante  $p_i^T$  aus zwei Komponenten zusammen. Es gilt

$$p_i^T = p_i^S + \alpha_j^E e_{ij}^0. \quad (2.8)$$

Der erste Term in Gleichung (2.8) beschreibt den primären und der zweite Term den sekundären pyroelektrischen Effekt, wobei  $\alpha_j^E$  der thermische Ausdehnungskoeffizient und  $e_{ij}^0$  der piezoelektrische Modul ist.

Genau wie beim direkten und inversen piezoelektrischen Effekt hat auch der pyroelektrische Effekt einen reziproken Effekt, welcher als elektrokalorischer Effekt bezeichnet wird. Dieser beschreibt eine Wechselwirkung zwischen der Temperatur und einer durch das Anlegen eines elektrischen Feldes hervorgerufenen Ladungsverschiebung. Entgegen der intuitiven Vermutung ist dieser Effekt bei einigen Materialien nicht zu vernachlässigen und führt zu deutlichen Temperaturänderungen [31]. Bei für Piezostapelaktoren eingesetzten Materialien ist dieser Effekt jedoch, wie in Abschnitt 2.2 näher erläutert wird, in keinem Fall von Bedeutung.

---

### 2.1.4 Ferroelektrizität

---

Von Ferroelektrizität spricht man, wenn sich die Richtung der spontanen Polarisierung eines polaren Kristalls durch Anlegen eines externen elektrischen Feldes ändern lässt. Bei einigen Kristallen ist eine Änderung der spontanen Polarisierung jedoch nicht möglich, da es zuvor zu einem elektrischen Durchschlag kommt.

Somit können die Ferroelektrika als Untergruppe der Pyroelektrika interpretiert werden. Im Gegensatz zur Piezoelektrizität und der Pyroelektrizität, welche unmittelbar mit den Symmetrieeigenschaften des Kristalls verknüpft sind, handelt es sich bei der Definition der Ferroelektrizität um eine rein empirische Definition.

Damit ein leichtes elektrisches Schalten der Polarisierung durch das elektrische Feld möglich ist, muss die Energiebarriere zwischen den beiden Schaltzuständen niedrig sein. Häufig deutet dies

darauf hin, dass es einen nur wenig instabileren Zustand gibt, welcher keine polaren Eigenschaften aufweist. Dieser lässt sich in der Regel durch einfaches Erwärmen des Ferroelektrikums erreichen. Die Temperatur, ab welcher die ferroelektrischen Eigenschaften verschwinden, wird als Curie-Temperatur  $\Theta_c$  bezeichnet. Den Abfall der relativen Dielektrizitätskonstante hin zur Curie-Temperatur  $\Theta_c$  lässt sich für viele Ferroelektrika durch das so genannte Curie-Weiss-Gesetz beschreiben welches durch

$$\epsilon_r^T - 1 = \left( \frac{C_{cw}}{\Theta - \Theta_c} \right) \quad (2.9)$$

gegeben ist. Dabei ist  $C_{cw}$  die so genannte Curie-Weiss-Konstante.

---

## 2.2 Lineare Grundgleichungen piezoelektrischer Materialien

---

Die linearen Zustandsgleichungen für piezoelektrische Materialien lassen sich aus grundlegenden energetischen Überlegungen herleiten. Dabei werden rein formal die bereits in Kapitel 2.1 eingeführten linearen Wechselwirkungen gefunden. Die hier dargestellte Herleitung ist sinngemäß aus [30] übernommen. Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik gilt,

$$dU = \mathbb{d}q + \mathbb{d}w, \quad (2.10)$$

das heißt die Änderung der inneren volumenbezogenen Energie  $dU$  setzt sich zusammen aus der pro Volumen zugeführten Wärme  $\mathbb{d}q$  und der am Volumen verrichteten Arbeit  $\mathbb{d}w$ . Bei den in Gleichung (2.10) durch Doppellinienbuchstaben gekennzeichneten Differentialen handelt es sich um so genannte unvollständige Differentiale. Im Gegensatz zu vollständigen Differentialen sind diese wegababhängig. Praktisch bedeutet dies, dass sich die mit einer Zustandsänderung einhergehende Änderung der inneren Energie nicht aus dem Zustand vor und nach der Zustandsänderung berechnen lässt, sondern dass die gesamte Historie der Zustandsänderung berücksichtigt werden muss.

Bei Piezokristallen setzt sich die verrichtete Gesamtarbeit  $\mathbb{d}w$  aus der mechanischen  $\mathbb{d}w_{mech}$  und der elektrischen Arbeit  $\mathbb{d}w_{el}$  zusammen. Für die mechanische Arbeit gilt unter Vernachlässigung von geometrischen Nichtlinearitäten, bei einer adiabatischen oder isothermen Zustandsänderung

$$\mathbb{d}w_{mech} = T_{ij} dS_{ij}. \quad (2.11)$$

Die elektrische Arbeit ist gegeben durch

$$\mathbb{d}w_{el} = E_n dD_n. \quad (2.12)$$

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, lässt sich die zugeführte Wärmemenge  $\mathbb{d}q$  für reversible Zustandsänderungen durch die Temperatur  $\Theta$  und die Entropiedichte  $d\sigma$  beschreiben

$$\mathbb{d}q = \Theta d\sigma. \quad (2.13)$$

Aus den Gleichungen (2.10) bis (2.13) folgt

$$dU = \Theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i. \quad (2.14)$$

Dieser Ausdruck wird als totales Differential der inneren Energiedichte  $U$  bezeichnet und stellt die Grundlage der Thermodynamik der elastischen Dielektrika dar [30]. Mit Hilfe einer Legendre Transformation [32] lässt sich die inneren Energie  $U$  in andere, äquivalente thermodynamische Potentiale überführen. Häufig wird in der Literatur das Gibbssche Potential verwendet, da die aus diesem hervorgehenden Zustandsgleichungen nur die experimentell gut bestimmbaren unabhängigen Zustandsgrößen Temperatur  $\Delta\Theta$ , elektrische Feldstärke  $E$  und mechanische Spannung  $T$  enthalten:

$$\Delta\sigma = \frac{\rho c^{E,T}}{\Theta} \Delta\Theta + p_k^T E_k + \alpha_\mu^E T_\mu, \quad (2.15)$$

$$D_i = p_i^T \Delta\Theta + \epsilon_{ik}^{\Theta,T} E_k + d_{i\mu}^\sigma T_\mu, \quad (2.16)$$

$$S_\lambda = \alpha_\lambda^E \Delta\Theta + d_{k\lambda}^\sigma E_k + s_{\lambda\mu}^{\Theta,E} T_\mu. \quad (2.17)$$

Aus Gleichung (2.16) ergibt sich so z. B. unmittelbar, dass Temperaturänderungen erhebliche elektrische Spannungen erzeugen können. Unter der Annahme, dass die Änderung der elektrischen Flussdichte  $\Delta D$  gleich 0 ist, was sich experimentell durch nicht Kurzschließen der Anschlusselektroden realisieren lässt, und dass der Aktor während der Temperaturänderung  $\Delta\Theta$  nicht in seiner Dehnung behindert wird, so dass  $T$  gleich Null ist, ergibt sich aus (2.16)

$$E_k = -\frac{p_i^T \Delta\Theta}{\epsilon_{ik}^{\Theta,T}}. \quad (2.18)$$

Für eine Temperaturänderung von nur  $\Delta\Theta = 10^\circ\text{C}$  ergibt sich unter Verwendung der in Tabelle 2.1 angegebenen Parameter bei einer Schichtdicke von 0,5 mm eine Spannung von ca.  $u_{pyro} = 161\text{ V}$ . Da die Temperaturänderungen jedoch nur sehr langsam vonstattengehen, spielt dieser Effekt beim Betrieb von Piezostapelaktoren nur eine untergeordnete Rolle. Dies gilt insbesondere bei der Verwendung von nicht stromgeregelten Verstärkern, welche eine konstante Spannung halten und deshalb die Ladung abfließen lassen.

Mit Hilfe einer Legendre Transformation lässt sich die innere Energie  $U$  auch in die Enthalpie  $H$  überführen, welche durch

$$dH = \Theta d\sigma - D_k dE_k - S_\mu dT_\mu \quad (2.19)$$

gegeben ist. Für die linearen Zustandsgleichungen ergibt sich dann unter Verwendung der unabhängigen Variablen Entropiedichte  $\Delta\sigma$ , elektrisches Feld  $E_k$  und mechanische Spannung  $T_\mu$ :

$$\Delta\Theta = \frac{\Theta}{\rho c^{E,T}} \Delta\sigma - \Theta v_k^T E_k - \Theta \xi_\mu^E T_\mu, \quad (2.20)$$

$$D_i = \Theta v_i^T \Delta\sigma + \epsilon_{ik}^{\sigma,T} E_k + d_{i\mu}^\sigma T_\mu, \quad (2.21)$$



$$S_\lambda = \Theta \xi_\lambda^E \Delta\sigma + d_{k\lambda}^\sigma E_k + s_{\lambda\mu}^{\sigma,E} T_\mu. \quad (2.22)$$

Die beiden letzten Terme der rechten Seite von Gleichung (2.20) sind bei für Aktoren verwendeten Piezokeramiken vernachlässigbar klein. Dies ergibt sich unmittelbar aus der experimentellen Beobachtung, da sowohl eine Änderung des anliegenden elektrischen Feldes als auch eine Änderung der mechanischen Spannung nicht zu einer messbaren Temperaturänderung führen. Diese Beobachtung lässt sich auch durch formales Ausrechnen der Terme mit Literaturwerten nachweisen. Das in der Literatur wenig verbreitete pyroelektrischen Modul  $v_k^T$  lässt sich, nach [30], unter Kenntnis des pyroelektrischen Koeffizienten  $p_k^T$  zu

$$v_k^T = \frac{1}{\rho c^{T,E}} p_k^T \quad (2.23)$$

berechnen. Für den thermoelastischen Ausdehnungsmodul  $\xi_\mu^E$  gilt ebenfalls nach [30] unter Kenntnis des thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\xi_\mu^E = \frac{1}{\rho c^{T,E}} \alpha_\mu^T. \quad (2.24)$$

Tabelle 2.1 Literaturwerte piezoelektrischer Materialien entnommen aus [33].

Dichte $\rho$	7500 kg/m <sup>3</sup>
Wärmekapazität $c$	400 J/(kg K)
thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha$	-6e-6 1/K bis 2,5e-6 1/K
pyroelektrischer Koeffizient $p_i$	500e-6 C/(m <sup>2</sup> K)

Unter Verwendung der in Tabelle 2.1 angegebenen Literaturwerte ergibt sich aus Gleichung (2.20) bei einer Temperatur von 20°C eine durch ein elektrisches Feld von 2 kV/mm verursachte Temperaturänderung von ca. 0,1 °C. Wird der Aktor mit einer mechanischen Spannung von 50 MPa beaufschlagt, so ergibt sich rein formal eine Temperaturänderung von ca. 0,03 °C. Somit liegen die durch typische elektrische Felder und mechanische Spannungen erzeugte Temperaturänderung, wenn auch nur knapp, unterhalb der Messbarkeitsgrenze der in dieser Arbeit verwendeten Temperaturmesstechnik. Somit stimmt die Theorie mit der experimentellen Beobachtung überein. Im reversiblen Fall ist folglich die Änderung der Temperatur ausschließlich auf die Zu- beziehungsweise Abfuhr von Entropie über die Systemgrenze zurückzuführen, wobei dies wiederum mit der Übertragung von Wärme über die Systemgrenze gleichzusetzen ist [34]. Hier wird deutlich, dass die reversible Thermodynamik nicht ausreicht um die Eigenerwärmung des Aktors zu beschreiben.

---

Unter Berücksichtigung irreversibler Prozesse ergibt sich für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

$$d\sigma = \mathbb{d}_e\sigma + \mathbb{d}_i\sigma. \quad (2.25)$$

Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (2.25) beschreibt den Entropiefluss über die Systemgrenze. Findet kein Massenaustausch zwischen dem System und der Umgebung statt, ist der Entropiefluss über die Systemgrenze analog zu Gleichung (2.13) gegeben durch

$$\mathbb{d}_e\sigma = \frac{\mathbb{d}_e Q_{trans}}{\Theta}. \quad (2.26)$$

Der zweite Term repräsentiert die im System durch Verluste generierte Entropie und kann auch als Entropiequelle interpretiert werden. Nach [35] besteht zwischen den Verlusten und der Entropieproduktion der folgende Zusammenhang

$$\mathbb{d}_i\sigma = \frac{\mathbb{d}_i Q_{loss}}{\Theta}. \quad (2.27)$$

Folglich kann mit Hilfe der Gleichungen (2.25) bis (2.27), unter Berücksichtigung der Wegabhängigkeit der Integrale bei Kenntnis des über die Systemgrenze strömenden Wärmestroms  $Q_{trans}$  sowie der Verlustarbeit  $Q_{loss}$ , direkt die Entropieänderung  $\Delta\sigma$  ermittelt werden. Mit Hilfe der Zustandsgleichungen (2.20) bis (2.22) lässt sich dann direkt die durch Wärmetransport und Verluste verursachte Temperatur-, Dehnungs- und elektrische Flussdichteänderung ermitteln. Es sei jedoch an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, dass die oben beschriebenen linearen Gleichungen nur einen stark beschränkten Gültigkeitsbereich haben. Wird der so genannte Kleinsignalbereich, was bei Piezostapelaktoren typischerweise der Fall ist, verlassen, kommen Nichtlinearitäten und Hystereseeffekte hinzu, welche durch die linearen Gleichungen nur unzureichend abgebildet werden. Auch die Beschreibung des Aktors mit nur einer Temperatur ist im Allgemeinen nicht möglich, da sich innerhalb des Aktors, wie später in Kapitel 4.3 dargestellt, erhebliche Temperaturgradienten einstellen.

---

## 2.3 Kristallstruktur und Aufbau von PZT-Keramiken

---

Die Aktorkeramiken werden durch einen Sinterprozess hergestellt. Bei dem für Piezostapelaktoren typischen Blei-Zirkonat-Titanat (PZT) handelt es sich um einen Mischkristall aus Blei-Zirkonat ( $\text{PbZrO}_3$ ) und Blei-Titanat ( $\text{PbTiO}_3$ ). Die Elementarzellen weisen oberhalb der Curie-Temperatur eine kubische Perowskit-Struktur auf. Dabei sitzen die Bleiatome auf den Ecken der Elementarzelle, die Sauerstoffatome sitzen auf den Flächen der Elementarzellen. Im Zentrum der Elementarzelle befindet sich ein Zirkonium oder ein Titan-Atom. Unterhalb der Curie-Temperatur ergibt sich bei hohen  $\text{PbZrO}_3$ -Anteilen eine rhomboedrische Kristallstruktur und bei einem hohen  $\text{PbTiO}_3$ -Anteil eine tetragonale Kristallstruktur. Beide Kristallphasen sind ferroelektrisch. Die besten piezoelektrischen Eigenschaften ergeben sich an der Phasengrenze zwischen den beiden

---

Kristallstrukturen. Diese weist nur eine geringe Temperaturabhängigkeit auf und wird als morphotrope Phasengrenze bezeichnet [24]. Die besonders guten piezoelektrischen Eigenschaften lassen sich darauf zurückführen, dass an der Phasengrenze in gleichem Maße rhomboedrische sowie tetragonale Elementarzellen vorhanden sind, was unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Polungsrichtung 14 verschiedene Polarisationsrichtungen ergibt [36]. So ist eine besonders einfache Polarisationsänderung möglich. Beim Unterschreiten der Curie-Temperatur bilden sich aus energetischen Gründen Gebiete gleicher Polarisation aus [23], so genannte piezoelektrische Domänen. Die Trennlinien zwischen den Domänen werden als Domänenwände bezeichnet. Die einzelnen Domänen erstrecken sich jeweils über Teilbereiche der aus dem Sinterprozess hervorgegangenen Körner. Diese Körner grenzen sich wiederum durch so genannte Korngrenzen voneinander ab. Zwischen den Körnern kann es, vor allem bei einem unzureichenden Sinterprozess, zu Hohlräumen kommen, so genannten Poren.

Um die Eigenschaften der Keramik gezielt zu beeinflussen, werden Dotierungen eingesetzt, welche sich entsprechend ihrem Ionenradius auf den Blei oder Zirkonium, beziehungsweise Titanat, Gitterplätzen einlagern. Wird eine Donatordotierung eingesetzt, ergibt sich eine so genannte Weich-PZT Keramik. Eine Akzeptordotierung führt zu einer Hart-PZT Keramik. Weich-PZT's weisen im Gegensatz zu Hart-PZT's eine erhöhte Domänenwandmobilität auf, was zu einer höheren Polarisierbarkeit und größeren Dehnungen führt. Im Gegenzug steigen jedoch auch die Akteurverluste an.

Es lässt sich zusammenfassen, dass der Aufbau von piezoelektrischen Keramiken sehr komplex ist. Eine mikromechanische Simulation wird vor allem dadurch erschwert, dass die verschiedenen Strukturebenen miteinander interagieren. Der Schaltzustand einer einzelnen Elementarzelle ergibt sich aus der auf diese Elementarzelle wirkenden elektrischen und mechanischen Feldkräfte. Diese Feldkräfte resultieren jedoch nicht aus den unmittelbar benachbarten Elementarzellen, sondern ergeben sich aus der globalen Anordnung von Domänen, Körnern sowie extern angreifenden Kräften und elektrischen Feldern. Somit ist es praktisch nicht möglich das Verhalten einer Keramik unter Berücksichtigung der individuellen Mikrostruktur abzubilden. Ansätze zur Abbildung von Teilbereichen finden sich jedoch in [37]. Der hierzu notwendige Rechenaufwand ist aber so immens, dass die Simulation eines vollständigen Aktors nicht in absehbarer Zeit möglich wird.

---

## **2.4 Makroskopisches Großsignalverhalten von PZT-Keramiken**

---

Kapitel 2.4 beschäftigt sich mit dem makroskopischen Großsignalverhalten von Piezokeramiken. Es wird sowohl auf des bipolare als auch auf das unipolare Betriebsverhalten eingegangen.

---

### **2.4.1 Elektrisch induzierte Schaltprozesse**

---

Beim Anlegen eines elektrischen Feldes an eine Keramikprobe ergeben sich die in Abbildung 2.1 strichpunktiert dargestellten charakteristischen Hystereseschleifen [37], [38]. Abbildung 2.1 a) stellt die Polarisationshysteresis und Abbildung 2.1 b) die Dehnungshysteresis dar. Die

---

Dehnungshysterese wird aufgrund ihrer charakteristischen Form als Schmetterlingskurve bezeichnet. Diese Hysteresephänomene sind auf die in Kapitel 2.3 erläuterten Domänenschaltprozesse zurückzuführen. Nach der Herstellung ist die Keramik zunächst nicht gepolt (Abbildung 2.1, Zustand 1)). In diesem ungepolten Zustand nimmt die spontane Polarisation der einzelnen Domänen, wie in Abbildung 2.2 a) dargestellt, eine zufällige Orientierung ein. Dadurch stellt sich auch die minimale Dehnung der Probe ein. Wird nun erstmalig ein elektrisches Feld angelegt werden nach und nach die einzelnen Domänen in Richtung des elektrischen Feldes ausgerichtet. Dieser Vorgang ist in Abbildung 2.1 jeweils anhand der gepunktet dargestellten so genannten Neukurve nachzuvollziehen. Ab einem gewissen elektrischen Feld ist die Sättigungspolarisation erreicht. Dann sind alle Domänen ausgerichtet (Abbildung 2.1, Zustand 2)). Eine weitere Erhöhung des elektrischen Feldes führt nur noch zu einem linearen Anstieg der elektrischen Flussdichte. In diesem Sättigungszustand ergibt sich auch die maximale Dehnung der Probe. Dabei nehmen die Domänen den in Abbildung 2.2 b) dargestellten Zustand ein. Bei einer anschließenden Reduktion des elektrischen Feldes werden zunächst nur wenige Domänen zurück geschaltet. Ist das elektrische Feld erneut bei 0 V/m (Abbildung 2.1, Zustand 3)) angelangt, verbleibt eine remanente Polarisation beziehungsweise remanente Dehnung. Der Schaltzustand der Domänen in dieser Konfiguration ist in Abbildung 2.2 c) dargestellt. Bei einer weiteren Reduktion des elektrischen Feldes werden nun zunehmend Domänen in die umgekehrte Richtung umgeklappt. Entspricht die Länge der Probe der Probenlänge der ungepolten Probe (Abbildung 2.1, Zustand 4)), ist die so genannte Koerzitivfeldstärke  $E_c$  erreicht. Auf mikromechanischer Ebene betrachtet ergibt sich eine dem ungepolten Zustand artverwandte Ausrichtung der Domänen. Reduziert man das elektrische Feld weiter, werden weitere Domänen in die entgegengesetzte Richtung umgeklappt bis die negative Sättigung erreicht (Abbildung 2.1, Zustand 5)) ist. Die Ausrichtung der Domänen entspricht dem in Abbildung 2.2 b) dargestellten Zustand, jedoch um  $180^\circ$  gedreht. Wird das elektrische Feld auf null reduziert und dann in positive Richtung erhöht, ergibt sich über die in Abbildung 2.1 dargestellten Zwischenzustände 6) und 7) eine geschlossene Hystereseschleife. Dabei entspricht die Domänenorientierung in Zustand 6) dem Zustand 3) jedoch mit umgekehrter Orientierungsrichtung und der Zustand 7) dem Zustand 4).

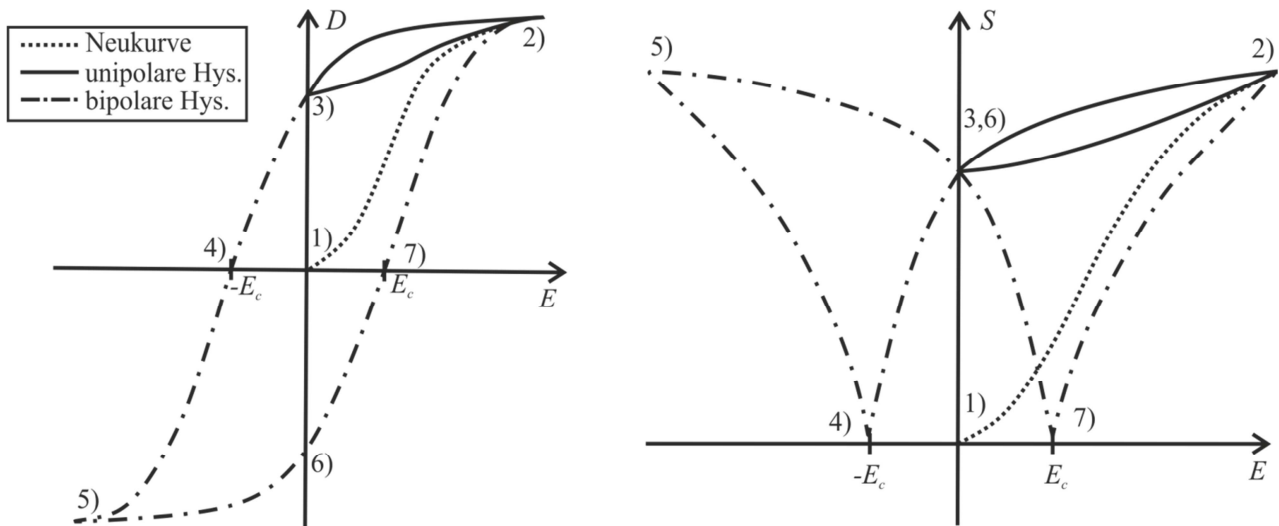


Abbildung 2.1 Form der Polarisations- und Dehnungshysterese beim Anlegen eines bi- beziehungsweise unipolaren elektrischen Feldes [39].

Piezoelektrische Stapelaktoren werden insbesondere im dynamischen Betrieb nur unipolar betrieben, d. h. nach einem Polungsvorgang werden die Aktoren nur noch mit einem positiven elektrischen Feld beaufschlagt. Im unipolaren Betrieb ergeben sich die in Abbildung 2.1 mit durchgezogenen Linien dargestellten Hystereseschleifen. Diese sind wesentlich einfacher aufgebaut als bei bipolarem Betrieb. Mikromechanisch betrachtet bewegt sich die Keramik dann nur noch zwischen den in Abbildung 2.2 b) und c) dargestellten Zuständen hin und her.

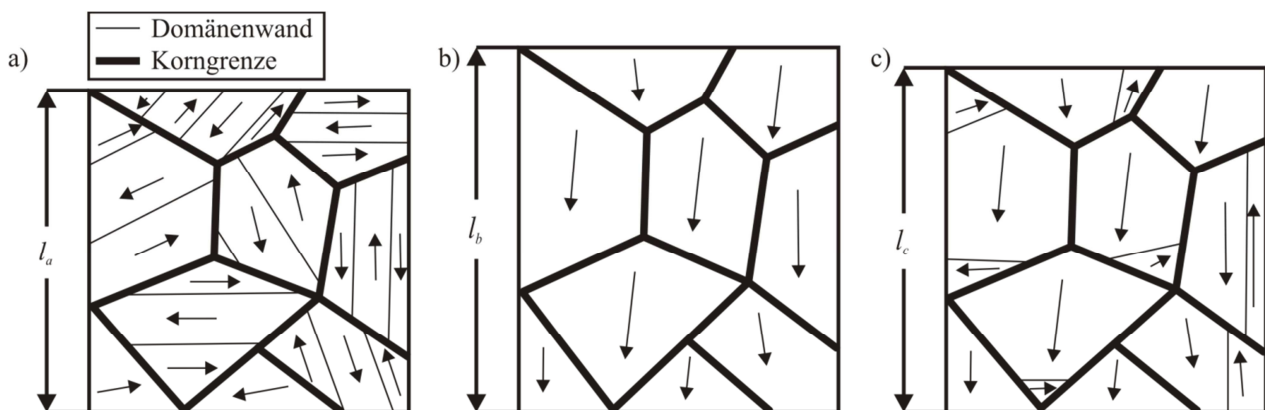


Abbildung 2.2 Schematische Darstellung des Domänenschaltzustands im a) ungepolten Zustand, b) Sättigungszustand und c) im gepolten Zustand bei  $E=0$  [37].

In seltenen Fällen wird auch ein so genannter semi-bipolarer Betrieb realisiert. Bei diesem werden zusätzlich zu den positiven elektrischen Feldern auch begrenzte negative elektrische Felder zugelassen, wobei diese immer höher als die negative Koerzitivfeldstärke sein müssen. Dieser Betriebsmodus ermöglicht etwas größere Stellwege führt jedoch zu erheblichen zusätzlichen Aktivitätsverlusten, welche zu einer beschleunigten Eigenerwärmung im dynamischen Betrieb führen.

---

Diese Arbeit beschränkt sich, weil die Verluste im bipolaren Betrieb größer sind, auf den für dynamische Anwendungen interessanteren unipolaren Betriebsmodus.

---

#### **2.4.2 Mechanisch induzierte Schaltprozesse**

---

Durch mechanische Spannungen lassen sich analog zum elektrischen Feld Domänenschaltprozesse hervorrufen. Dabei wird bei zugspannungsinduzierten Schaltungen die Polarisierung der Domänen in Richtung der Zugspannung ausgerichtet. Bei druckspannungsinduzierten Domänenschaltprozessen hingegen ergibt sich eine Ausrichtung der Domänen senkrecht zur Kraftrichtung. Eine makroskopische Änderung der Polarisierung tritt hierdurch nicht auf, da die Domänen beim Schaltvorgang keine Vorzugsrichtung aufweisen [40]. Stets zu beachten ist, dass die Festigkeitswerte des Materials nicht überschritten werden dürfen. Piezokeramiken weisen im Allgemeinen jedoch eine wesentlich geringere Zug- als Druckfestigkeit auf [41]. Darüber hinaus werden Stapelaktoren stets mit einer Druckvorspannung beaufschlagt, um einen sicheren Betrieb zu gewährleisten [42]. Deshalb sind zugspannungsinduzierte Domänenschaltprozesse bei Piezokeramiken im Allgemeinen und insbesondere bei Stapelaktoren nur im Versagensfall von Bedeutung. Druckspannungsinduzierte Schaltprozesse hingegen sind für Stapelaktoren relevant. Druckspannungsinduzierte reversible Domänenschaltprozesse treten bereits bei sehr geringen mechanischen Spannungen auf. Irreversible Schaltprozesse treten bei Weich-PZT Keramiken ab ca. 25 MPa, bei Hart-PZT Keramiken ab 150 MPa auf [43]. Die von den Aktorherstellern für den dynamischen Betrieb empfohlenen Vorspannungen für Stapelaktoren liegen bei 15 MPa [42], so dass zumindest bei Weich-PZT Keramiken irreversible Domänenschaltprozesse bei Lastspitzen im dynamischen Betrieb auftreten können.

---

### **2.5 Aufbau piezoelektrischer Stapelaktoren**

---

Es gibt zwei unterschiedliche Herstellungsverfahren zur Produktion piezoelektrischer Stapelaktoren. Zum einen werden piezoelektrische Folien gegossen, mit einer Elektrode bedruckt und anschließend im ungebrannten Zustand gestapelt und zu einem monolithischen Aktor gesintert. Zum anderen werden fertig gesinterte piezoelektrische Keramikscheiben zu Aktoren verklebt. Unabhängig vom Herstellungsverfahren liegt die maximal zulässige elektrische Feldstärke bei etwa 2 kV/mm. Mit der Folientechnik lassen sich geringere Schichtdicken realisieren, so dass zum Erreichen der 2 kV/mm Grenze niedrigere elektrische Spannungen notwendig sind. Dementsprechend spricht man hier von Niedervoltaktoren.

Die für die geklebten Aktoren notwendigen Keramikscheiben werden durch das Zersägen von Keramikstangen gewonnen. Hierbei ergeben sich höhere Schichtdicken. Dementsprechend sind zum Erreichen der 2 kV/mm Grenze höhere elektrische Spannungen notwendig. Deshalb wird von Hochvoltaktoren gesprochen.

Diese Arbeit beschränkt sich auf Hochvoltstapelaktoren. Diese sind mit größeren Stirnflächen verfügbar. Dies führt zu größeren Aktorkräften. Außerdem weisen diese pro Volumen eine deutlich

geringere elektrische Kapazität auf, was zu niedrigeren Strömen im dynamischen Betrieb führt. Deshalb wird nun ausführlich auf den Aufbau von Hochvoltaktoren eingegangen. Ein solcher ist schematisch in Abbildung 2.3 dargestellt. Die einzelnen Keramikscheiben mit der Schichtdicke  $l_s$  und dem Durchmesser  $D_a$  werden durch ein Sputterverfahren auf ihren Stirnseiten mit einer dünnen Silberschicht überzogen und anschließend gepolt. Dann wird der Stapel mit alternierender Polungsrichtung verklebt. Zwischen die Keramikscheiben wird jeweils ein Kontaktblech gelegt und mit einem nicht leitfähigen Kleber verklebt. Anschließend wird jedes zweite Kontaktblech mit Hilfe einer Lötchiene zur positiven Elektrode verbunden. Die restlichen Kontaktbleche werden zur negativen Elektrode verbunden. So entsteht ein alternierendes elektrisches Feld, welches mit der Polungsrichtung der Keramikscheiben korreliert.

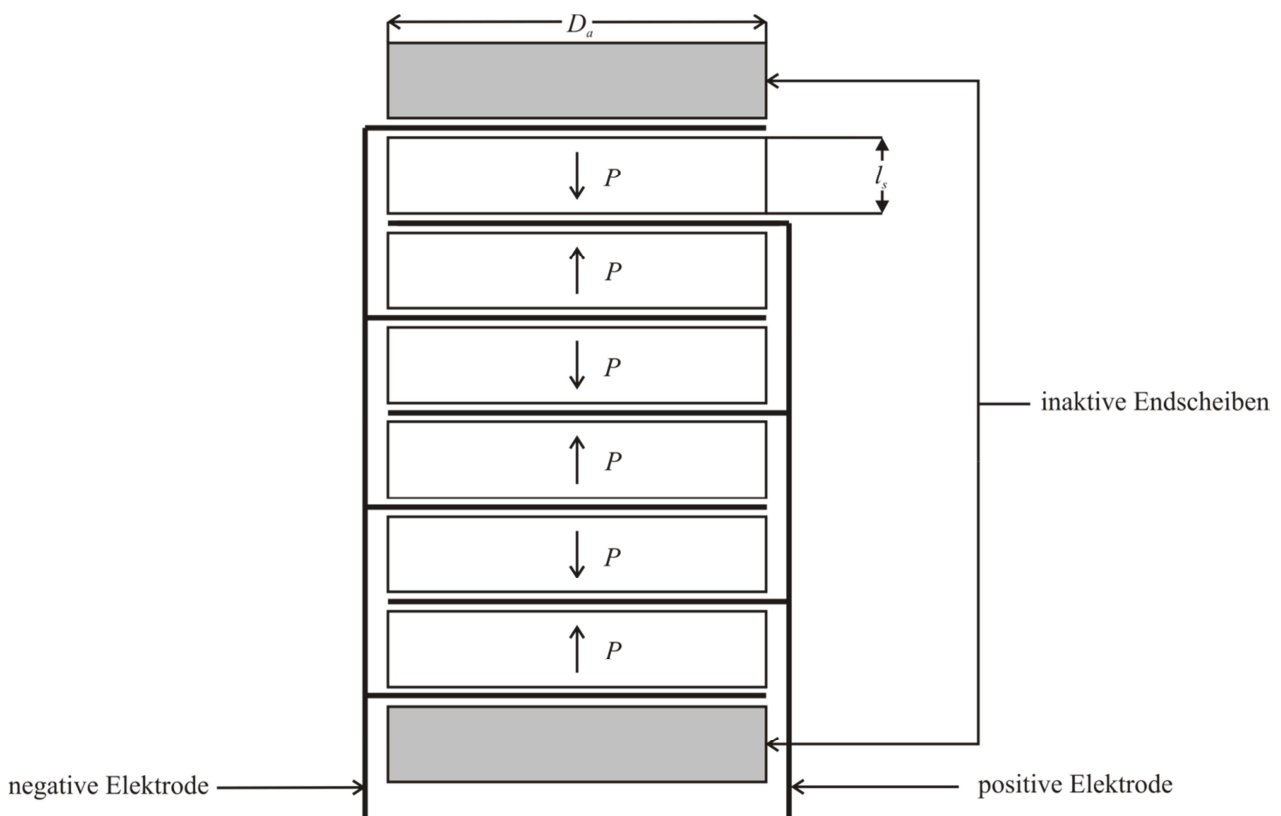


Abbildung 2.3 Schematischer Aufbau eines Hochvolt-Stapelaktors.

Aufgrund der Oberflächenrauigkeit der Keramikscheiben kommt es trotz des vorhandenen Klebers zu einem lokalen Kontakt von Keramikscheiben- und Kontaktblechoberfläche. Ist kein lokaler Kontakt vorhanden, fällt das gesamte elektrische Feld innerhalb der Klebeschicht ab und der Aktor ist nicht funktionsfähig. Typischerweise ist die Elektrode nicht als Vollmaterial ausgeführt, sondern es werden große Teile herausgeätzt, so dass eine siebartige Struktur entsteht. Dies führt zu einer verminderten Behinderung der Querdehnung der Keramikscheiben beim Anlegen eines elektrischen Feldes. So lassen sich höhere Stellwege bei gleichzeitig niedrigeren Eigenspannungen erreichen. Die niedrigeren Eigenspannungen wirken sich positiv auf die Lebensdauer der Aktoren aus. Das Design der Kontaktbleche ist von Hersteller zu Hersteller unterschiedlich und im Allgemeinen nicht

bekannt.

Für die elektrische Flussdichte eines Stapelaktors ergibt sich aufgrund des geschichteten Aufbaus

$$D = \frac{E_{ch}}{nA_e}, \quad (2.28)$$

wobei  $n$  die Anzahl der aktiven Schichten,  $A_e$  die Querschnittsfläche einer Einzelschicht und  $E_{ch}$  die elektrische Ladung darstellt. Das auf die Keramikscheiben wirkende elektrische Feld  $E$  ergibt sich aus der angelegten Spannung  $u$  mit der Schichtdicke  $l_s$  der Keramikscheiben zu

$$E = \frac{u}{l_s}. \quad (2.29)$$

Mit der Aktorkraft  $F$  und der Querschnittsfläche  $A_c$  ergibt sich für die in Polungsrichtung wirkende mechanische Spannung

$$T = \frac{F}{A_c}. \quad (2.30)$$

Die Dehnung der Aktorkeramik  $S$  ist beschrieben durch

$$S = \frac{\Delta l}{l_a}, \quad (2.31)$$

wobei die aktive Länge des Aktors  $l_a$  durch

$$l_a = n l_s \quad (2.32)$$

gegeben ist. Das Einsetzen dieser Beziehungen in die linearen Grundgleichungen (2.20) bis (2.22) und die ausschließliche Betrachtung der 3- bzw. Polungsrichtung führt auf

$$\Delta\Theta = \frac{\Theta}{\rho c^{E,T}} \Delta\sigma - \Theta v_3^T \frac{u}{l_s} - \Theta \xi_3^E \frac{F}{A_c}, \quad (2.33)$$

$$\frac{E_{ch}}{nA_e} = \Theta v_3^T \Delta\sigma + \epsilon_3^{\sigma,T} \frac{u}{l_s} + d_{33}^{\sigma} \frac{F}{A_c}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\Delta l}{n l_s} = \Theta \xi_3^E \Delta\sigma + d_{33}^{\sigma} \frac{u}{l_s} + s_{33}^{\sigma,E} \frac{F}{A_c}. \quad (2.35)$$

Diese Gleichungen stellen die Grundlage der Modellierung piezoelektrischer Stapelaktoren dar und werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit mehrfach vorkommen.

---

## 2.6 Unipolares Großsignalverhalten

---

In diesem Abschnitt wird das unipolare Großsignalverhalten von Piezostapelaktoren im quasistatischen Betrieb dargestellt. Die mechanische Resonanzfrequenz typischer Stapelaktoren liegt im Bereich von 20 bis 30 kHz [42], so dass auch Schwingungen mit mehreren 100 Hertz noch als quasistatisch angesehen werden können. Es wird sowohl auf das temperatur- als auch auf das



---

lastabhängige Verhalten eingegangen. Die in Abschnitt 2.6 gezeigten Messwerte gehen auf die Arbeiten von Marszolek [22] zurück. Untersuchungsgegenstand ist ein Hochvolt-Piezostapelaktor des Herstellers Physik Instrumente (PI).

---

### 2.6.1 Einfluss der Temperatur

---

Die Temperatur hat einen erheblichen Einfluss auf das makroskopische Aktorverhalten. Abbildung 2.4 zeigt das gemessene Großsignalverhalten im Temperaturbereich von 20 °C bis 140 °C. Bei den Messungen wurden Prüflinge mit einem Durchmesser von 16 mm und einer Länge von 60 mm verwendet. Während der Messungen sind die Aktoren mit 30 MPa vorgespannt. Die Umgebungssteifigkeit beträgt 30 N/ $\mu$ m. Als Ansteuersignal wird ein Dreieckssignal mit einem Maximalwert von 2 kV/mm verwendet.

Abbildung 2.4 stellt die sich hierbei ergebenden Änderungen der elektrischen Flussdichte  $\Delta D$  sowie die sich einstellende Aktordehnung  $\Delta S$  über dem angelegten elektrischen Feld  $E$  sowie der Änderung der mechanischen Spannung  $\Delta T$  dar. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird jedoch zur besseren Lesbarkeit auf die Darstellung des  $\Delta$  verzichtet. Die dargestellten Messwerte verstehen sich deshalb stets als Änderung zum Einbau- bzw. Vorspannungszustand. In Abbildung 2.4 a) ist der Zusammenhang zwischen der elektrischen Flussdichte  $D$  und dem elektrischen Feld  $E$  ( $D - E$  Hysterese) dargestellt. Es ergibt sich eine ausgeprägte Hystereseschleife, welche eine deutliche Temperaturabhängigkeit aufweist. Der Maximalwert der erzeugten elektrischen Flussdichte nimmt mit zunehmender Temperatur zu. Bei einer Temperatur von 140 °C ist die gemessene elektrische Flussdichte um ca. 28 % größer als bei Raumtemperatur 20 °C. Die Grundform der Hystereseschleife ändert sich durch die Temperaturänderung nicht.

Abbildung 2.4 b) zeigt den Zusammenhang von Dehnung  $S$  und elektrischem Feld  $E$  ( $S - E$  Hysterese). Auch hier stellt sich eine charakteristische Hystereseschleife ein, welche eine Temperaturabhängigkeit aufweist. Die Dehnung nimmt ebenfalls mit der Aktortemperatur zu. Die Abhängigkeit ist jedoch deutlich schwächer ausgeprägt. Bei einer Temperatur von 140 °C ist die gemessene Dehnung nur um 10 % größer als bei 20 °C.

Abbildung 2.4 c) zeigt den Zusammenhang zwischen elektrischer Flussdichte  $D$  und der mechanischen Spannung  $T$  ( $D - T$  Hysterese). Dieser Zusammenhang ist nur sehr schwach mit Hysterese behaftet, temperaturabhängig und nahezu linear. Abbildung 2.4 d) stellt den Zusammenhang zwischen mechanischer Spannung  $T$  und der Dehnung  $S$  dar ( $S - T$  Hysterese). Es ergibt sich ein hysteresefreier Zusammenhang. Die gemessenen Kurven liegen für alle untersuchten Temperaturen nahezu perfekt übereinander. Dies deutet darauf hin, dass sich die Steifigkeit des Aktors mit der Temperatur nur geringfügig ändert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Hysteresephänomene hauptsächlich bei der Auftragung der Messgrößen über dem elektrischen Feld sichtbar werden. Bei einer Auftragung der Dehnung  $S$  und der elektrischen Flussdichte  $D$  über der mechanischen Spannung treten keine relevanten Hystereseeffekte auf.

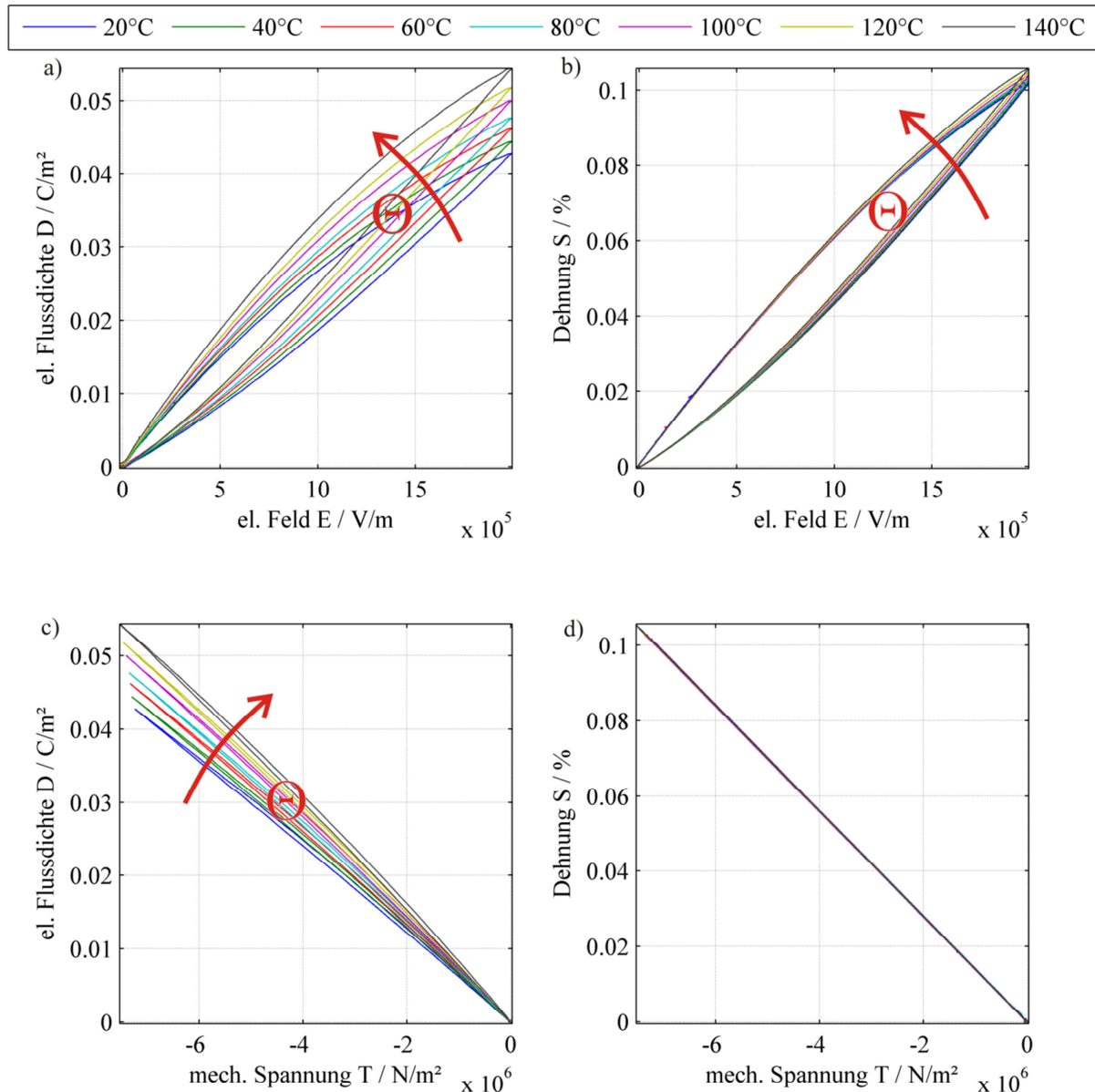


Abbildung 2.4 Unipolares Großsignalverhalten eines Piezostapelaktors bei unterschiedlichen Temperaturen [22].

## 2.6.2 Einfluss der Vorspannung

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der mechanischen Vorspannung  $T_0$  auf das Aktorverhalten dargestellt. Hierzu wurde der Aktor mit 10 MPa, 30 MPa und 50 MPa vorgespannt. Als Ansteuersignal kommt erneut ein Dreieckssignal mit einem Maximalwert von 2 kV/mm zum Einsatz.

Abbildung 2.2 a) stellt die  $D - E$  Hysterese dar. Es zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der Temperaturabhängigkeit. Der Maximalwert der elektrischen Flussdichte nimmt mit zunehmender

Vorspannung  $T_0$  zu. Die grundlegende Hystereseform bleibt erneut erhalten. Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Fläche der bei 50 MPa Vorspannung gemessenen  $D - E$  Hysterese größer ist als die Hysteresefläche bei 10 MPa. Abbildung 2.2 b) zeigt die  $S - E$  Hysterese. Der Einfluss der Vorspannung  $T_0$  ist auch hier erkennbar, jedoch erneut geringer als bei der  $D - E$  Hysterese. Darüber hinaus ist der Zusammenhang zwischen Vorspannung und Dehnung nicht eindeutig. Zwischen 10 MPa und 30 MPa nimmt die Dehnung zu. Die bei 30 MPa und 50 MPa gemessenen Hystereseschleifen liegen jedoch nahezu übereinander. Einen möglichen Erklärungsansatz für dieses Verhalten liefert die aus dem Kleinsignalbereich bekannte Vorspannungsabhängigkeit der piezoelektrischen Ladungskonstante  $d_{33}$  [44].

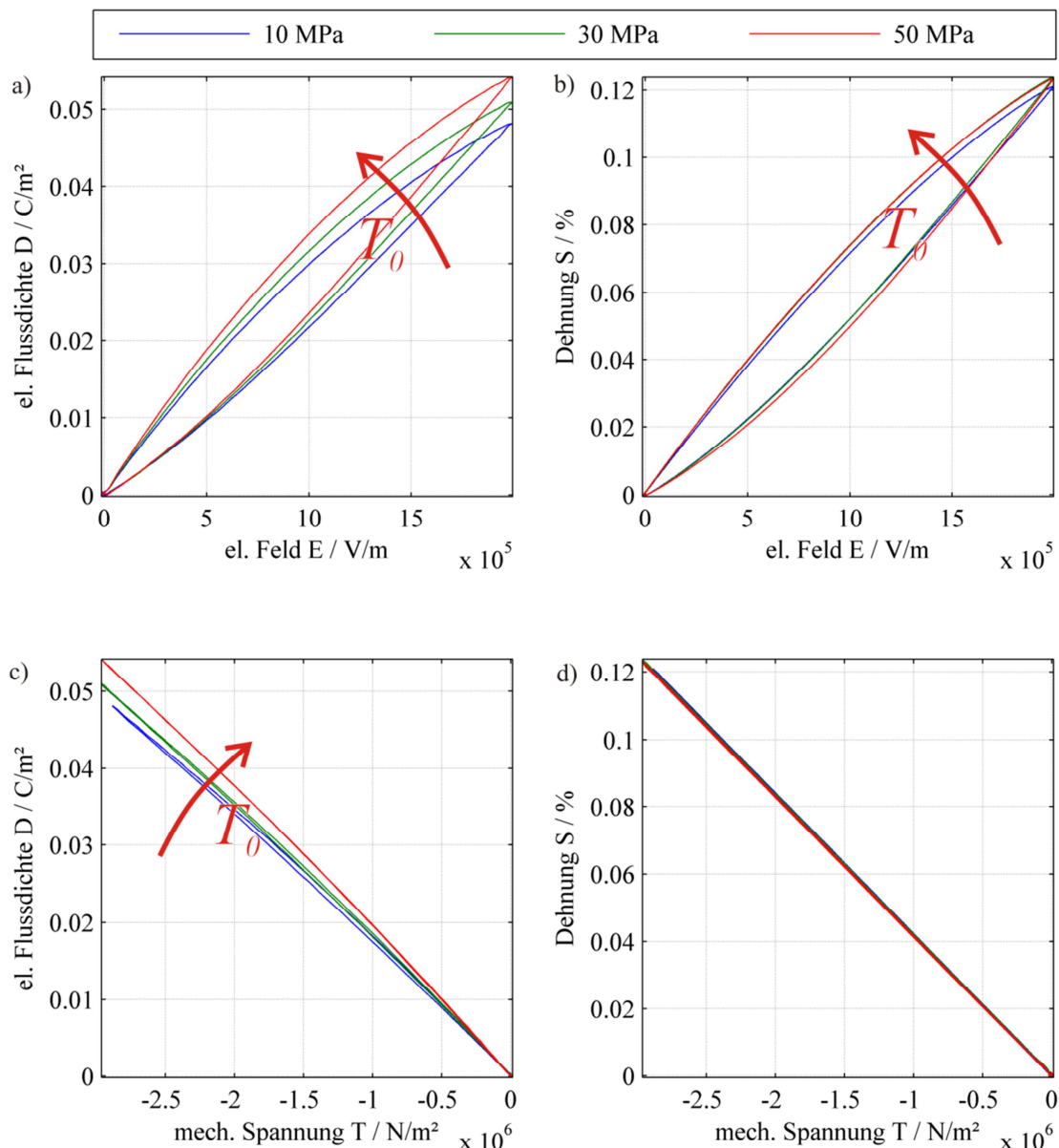


Abbildung 2.5 Unipolares Großsignalverhalten eines Piezostapelaktors bei unterschiedlichen mechanischen Vorspannungen [22].

Die  $D - T$  Hysterese ist in Abbildung 2.2 c) dargestellt. Der Zusammenhang zwischen elektrischer Flussdichte und Dehnung ist erneut nahezu linear. Bei 10 MPa zeigt sich eine leichte Hysterese, welche bei 50 MPa nicht mehr erkennbar ist.

Abbildung 2.2 d) zeigt den Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang. Dieser ist linear und unabhängig von der Vorspannung.

### 2.6.3 Zeitabhängige Effekte

Piezokeramiken weisen niederfrequent einen Kriecheffekt sowie ein allgemein frequenzabhängiges Verhalten auf. Die Auswirkungen des Kriecheffekts sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Die mechanische Spannung  $T$ , welche auf den Aktor wirkt, wurde während des Versuchs bei 4 kN konstant gehalten. In Teilabbildung a) ist das an den Aktor angelegte elektrische Feld dargestellt. Dieses steigt zunächst sprunghaft auf 1 kV/mm und wird dann für 10 Sekunden gehalten. Anschließend fällt es sprunghaft auf 0 V/mm ab und wird für weitere 10 Sekunden auf diesem Wert gehalten. Dann wiederholt sich das Signal, jedoch nun mit einer E-Feld Amplitude von 2 kV/mm. Während der Haltephasen bei 1 bzw. bei 2 kV/mm nehmen die elektrisch Flussdichte  $D$  sowie die Dehnung  $S$  des Aktors stetig weiter zu. Außerdem gehen während der Haltezeiten bei 0 V/mm die Messgrößen nicht vollständig zu ihrem Ausgangswert zurück.

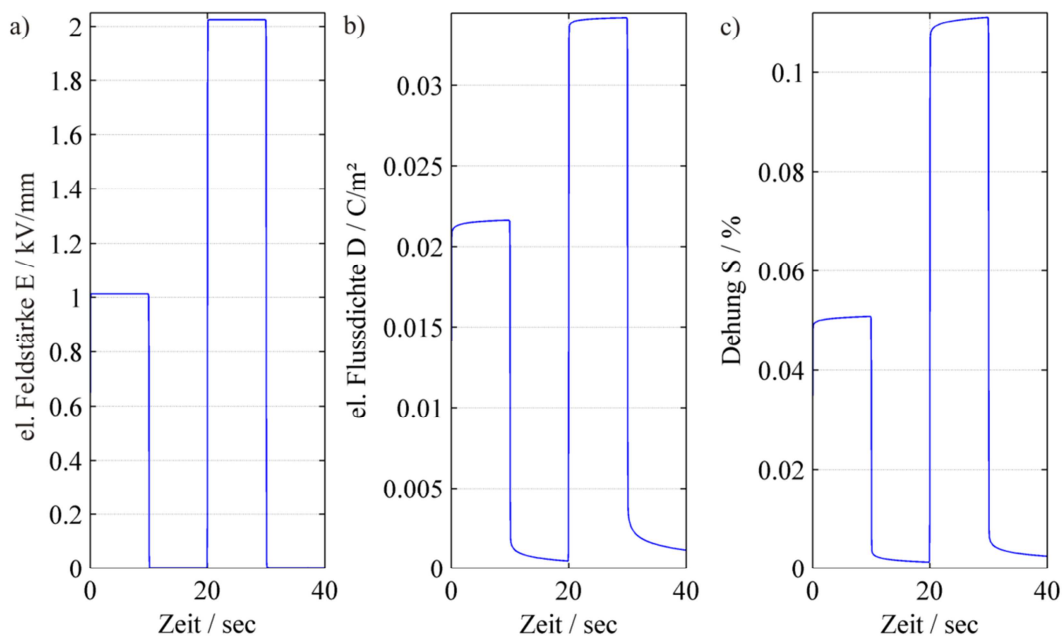


Abbildung 2.6 Einfluss des niederfrequenten Kriechverhaltens auf das Aktorverhalten: a) Eingangssignal b) elektrische Flussdichte c) Dehnung.

Die physikalischen Ursachen des Kriecheffektes sind noch nicht abschließend geklärt. Eine mögliche Erklärung sind transiente Ionenmigrationsvorgänge innerhalb der Keramik [45]. Andere Wissenschaftler sehen die Zeiteffekte jedoch in Verzögerungen bei nicht-180°

Domänenschaltprozessen begründet [46]. Das Kriechverhalten während der Haltephasen lässt sich durch ein logarithmisches Kriechgesetz gut annähern [47].

Darüber hinaus gibt es im höheren Frequenzbereich eine allgemeine Frequenzabhängigkeit der piezoelektrischen Hysterese [48]. So nimmt sowohl die maximale Dehnung als auch die maximale elektrische Flussdichte des Aktors bei höheren Frequenzen prinzipiell ab. Gleichzeitig wird die Hystereseschleife deutlich bauchiger [49]. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Aktoren ist diese Frequenzabhängigkeit im untersuchten Frequenzbereich jedoch relativ schwach ausgeprägt. Dies sei exemplarisch durch die in Abbildung 2.7 dargestellten Messwerte belegt, welche bei Signalfrequenzen von 1 Hz bis zu 150 Hz bei Raumtemperatur aufgenommen wurden.

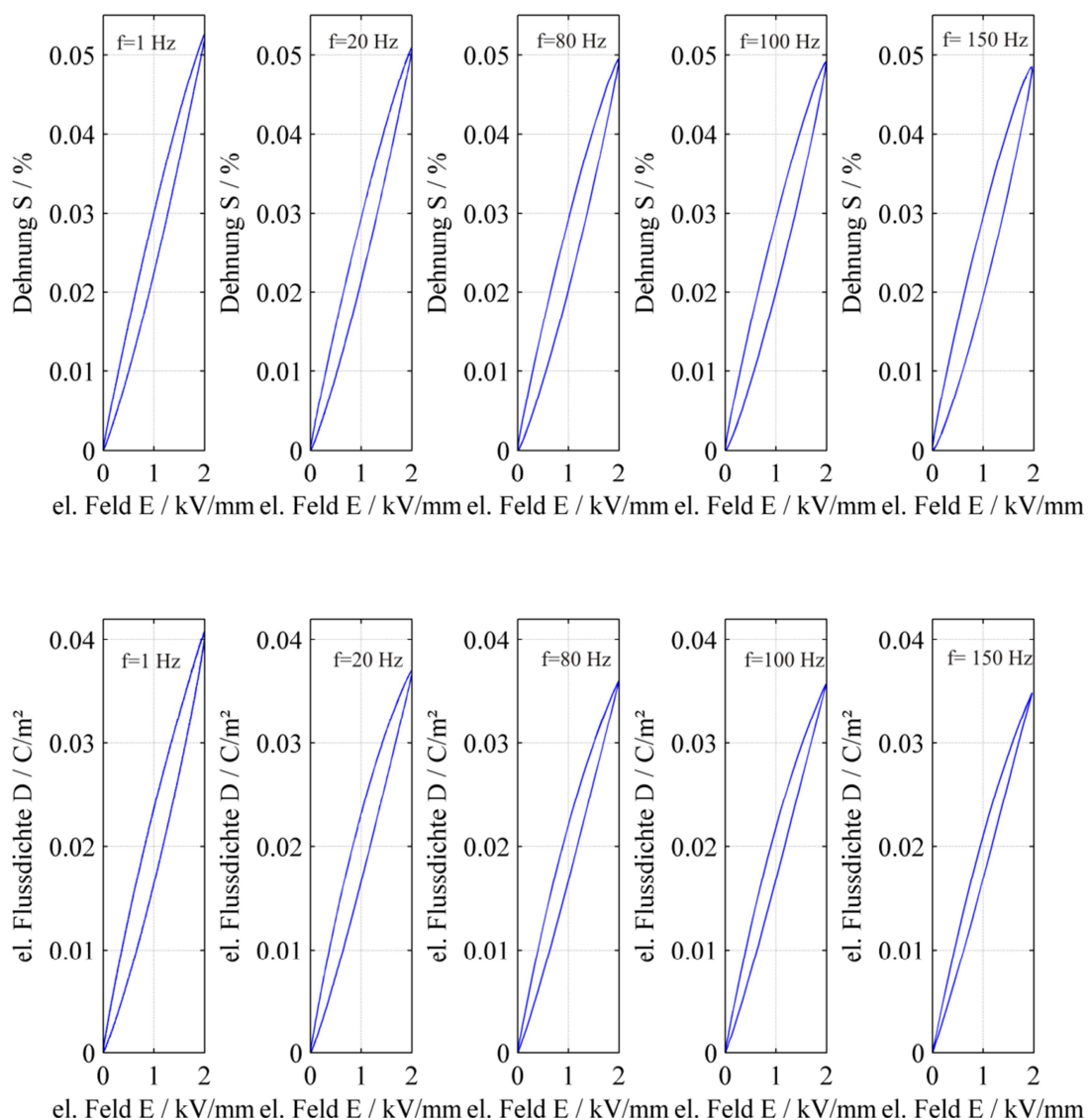


Abbildung 2.7 Frequenzabhängigkeit am Beispiel eines der untersuchten Aktoren (PIC 255).

Die Frequenz des Testsignals kann jeweils dem Teildiagramm entnommen werden. Der Aktor arbeitet während der Messungen gegen die passive Steifigkeit des Prüfstandsaufbaus. In der oberen Reihe ist die Dehnung  $S$  des Aktors, in der unteren Reihe die elektrische Flussdichte  $D$  über dem elektrischen Feld aufgetragen. Es fällt auf, dass sich bei einer Signalfrequenz von einem Hertz sowohl eine größere Auslenkung als auch eine größere Dehnung als bei den anderen Frequenzen einstellt. Dies ist auf den eben erwähnten Kriecheffekt zurückzuführen. Die Hystereseschleifen im Frequenzbereich von 20 Hz bis 150 Hz sehen sich jedoch allesamt sehr ähnlich und sind mit bloßem Auge kaum zu unterscheiden. Lediglich bei einer Signalfrequenz von 150 Hz lässt sich eine leichte Aufweitung der  $S - E$  Hysterese erahnen. Dies deckt sich beispielsweise mit den Ergebnissen von [17]. Darin werden Aktoren bei Frequenzen von bis zu 300 Hz untersucht und keine signifikante Frequenzabhängigkeit festgestellt.

#### 2.6.4 Energetische Interpretation der Messwerte

Eine energetische Interpretation der Messwerte eines Aktors ist am einfachsten für periodische Signale möglich. Durch Betrachtung des Energieflusses über die Systemgrenzen eines Aktors während einer Periode des elektrischen Feldes, welches zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_0$  beginnt und zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_1$  endet, so ergibt sich für die elektrische Energie

$$W_{el} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} u_{(t)} i_{(t)} d\tau. \quad (2.36)$$

Mit den in Kapitel 2.5 angegebenen Beziehungen für Stapelaktoren unter Verwendung der allgemeinen Definition des Stromes

$$i = \frac{dE_{ch}}{d\tau} \quad (2.37)$$

ergibt sich nach Einsetzen in (2.36)

$$W_{el} = V_{eff} \int_{D_0}^{D_1} E_{(t)} dD. \quad (2.38)$$

$V_{eff}$  ist hierin das vom elektrischen Feld aktivierte Keramikvolumen

$$V_{eff} = n A l_s. \quad (2.39)$$

Bei einem sinusförmigen elektrischen Feld entspricht somit die Fläche einer  $D - E$  Hystereseschleife der pro Volumen umgesetzten elektrischen Arbeit während einer Periode. Bei Betrachtung des mechanischen Energieflusses über die Systemgrenze findet man mit der Bestimmungsgleichung der mechanischen Arbeit

$$W_{mech} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F_{(t)} \dot{x}_{(t)} d\tau, \quad (2.40)$$

---

den in Kapitel 2.5 angegebenen Beziehungen für die Aktordehnung und die mechanische Spannung sowie der Definition der Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \quad (2.41)$$

für die mechanische Arbeit während eines Belastungszyklus

$$W_{mech} = V_{eff} \int_{S_0}^{S_1} T_{(S)} dS. \quad (2.42)$$

Somit entspricht die Fläche der  $T - S$  Hysterese der mechanischen Arbeit pro Volumen. Eine Betrachtung der in Kapitel 2.6.1 und 2.6.2 dargestellten Messwerte führt zu der Erkenntnis, dass unter den untersuchten Bedingungen nahezu ausschließlich elektrische Verluste auftreten. Mechanische Verluste sind aufgrund der nicht vorhandenen  $T - S$  Hysterese vernachlässigbar klein. Weitere Details zu den Aktorverlusten finden sich in Abschnitt 2.10.

---

## 2.7 Ansätze zur Modellierung piezoelektrischer Keramiken

---

Es gibt eine Vielzahl von teilweise stark unterschiedlichen Modellierungsansätzen für piezoelektrische Materialien und Aktoren. In diesem Abschnitt wird zunächst ein Überblick über die typischen Modellklassen gegeben. Im Anschluss wird dann auf die für diese Arbeit besonders wichtigen mathematischen Aktormodelle eingegangen.

Eine erste Modellklasse sind die so genannten mikromechanischen Materialmodelle, welche die Materialmodellierung auf einer mikroskopischen Ebene beginnen. Unter Anwendung von physikalischen Grundlagen, sowie unter Berücksichtigung der bekannten Mikrostruktur der piezoelektrischen Materialien (Elementarzellen, Domänen, Körner), wird versucht das makroskopische Materialverhalten abzubilden. Solche Modellansätze sind meist sehr komplex und rechenintensiv. Zweck dieser Modelle ist nicht ausschließlich die Simulation technischer Anwendungen, sondern sie dienen teilweise auch als Hilfsmittel für ein besseres Verständnis des elementaren Materialverhaltens. Typische Beispiele mikromechanischer Modelle sind die Modelle von Delibas [50], Antebth [37], McMeeking [51] und Fröhlich [52].

Im Gegensatz zu mikromechanischen Modellen wird bei phänomenologischen Modellen versucht das makroskopische Systemverhalten ohne Modellierung der Mikrostruktur wiederzugeben. Die phänomenologischen Modelle lassen sich weiter in rein mathematische und in thermodynamisch konsistente Modelle unterscheiden. Bei letzteren wird gefordert, dass unter keinen Umständen physikalische oder thermodynamische Gesetzmäßigkeiten verletzt werden. Alleine aus dieser Forderung lässt sich bereits eine Modellgrundstruktur ableiten. Typische Beispiele sind die Modelle von Landis [53], Su [54], Kamlah [55] und Linnemann [56]. Die Modelle sind meist dreidimensional formuliert und bieten so einen guten Ausgangspunkt für Finite Elemente Simulationen.

Bei den rein mathematischen Modellen wird eine Methodik ohne Beachtung physikalischer Zusammenhänge auf experimentelle Daten angewendet. Diese Modelle sind häufig nur



---

eindimensional formuliert, was jedoch bei der Modellierung von Piezostapelaktoren nicht hinderlich ist. Diese Modellklasse zeichnet sich durch eine sehr hohe Modellqualität und kurze Simulationszeiten aus. Die Gültigkeit der Modelle ist jedoch immer auf einen definierten Wertebereich beschränkt.

Da sich diese Arbeit auf piezoelektrische Stapelaktoren konzentriert, wird der Fokus auf die mathematischen Aktormodelle gelegt. Diese bieten wie oben erwähnt kurze Simulationszeiten bei gleichzeitig hoher Modellgüte, was eine mechatronische Gesamtsystemmodellierung ermöglicht. Darüber hinaus ist der typische Arbeitsbereich von Piezostapelaktoren beschränkt. Dies ist zum einen auf die uniaxiale Arbeitsweise zurückzuführen, zum anderen ergeben sich aus der Forderung nach Zuverlässigkeit des Aktorsystems typische Betriebsgrenzen. Deshalb stellt der begrenzte Gültigkeitsbereich der mathematischen Modelle keine Einschränkung dar, da dieser immer noch ausreicht um die Aktoren in allen realtypischen Situationen abzubilden.

---

### 2.7.1 Anforderungen an das mathematische Hysteresemodell

---

Die zur Modellierung von piezoelektrischen Materialien in Frage kommenden Modelle müssen wesentliche Grundanforderungen erfüllen.

Ein erstes Kriterium ist das Speicherverhalten des Modells. Bei Modellen mit lokalem Speicher muss der Ausgangswert eines Modells  $y_{(\tau)}$  unter Kenntnis des Eingangswertes  $u_{(\tau)}$  und eines Startausgangswertes  $y_{(\tau_0)}$  für alle Zeitpunkte  $\tau \geq \tau_0$  eindeutig bestimmbar sein. Werden zum Bestimmen von  $y_{(\tau)}$  auch Werte von  $u_{(\tau)}$  vor dem Zeitpunkt  $\tau_0$  benötigt, spricht man von einem Modell mit nicht lokalem Speicher. Wie in Kapitel 2.4 und 2.6 erläutert, ist das Großsignalverhalten von Piezostapelaktoren durch Hysteresephänomene geprägt. Daraus folgt, dass das Verhalten des Aktors nicht nur vom aktuellen Belastungszustand abhängt, sondern dass auch die Belastungsgeschichte von Bedeutung ist. Deshalb kommen zur Modellierung von piezoelektrischen Keramiken nur Modelle mit nicht lokalem Speicher in Frage.

Ein weiteres grundlegendes Kriterium ist wie die Hystereseschleife durchlaufen wird. Sind Innenschleifen möglich, wird von aktiver Hysterese gesprochen. Sind keine Innenschleifen möglich, liegt ein passives Hysteresemodell vor. Bei Piezostapelaktoren gibt es sowohl äußere als auch innere Hystereseschleifen. Somit scheiden passive Hysteresemodelle zur Modellierung von piezoelektrischen Materialien aus.

Des Weiteren gibt es zur mathematischen Modellierung von Hysterese zwei grundsätzlich unterschiedliche Modellierungsmethoden. Die erste Methode basiert auf der Verwendung und Überlagerung von elementaren Hystereseeoperatoren, die zweite Methode basiert auf der Verwendung von Differentialgleichungen.

Bei der Modellierung von Hystereseeffekten mit Hystereseeoperatoren sind drei elementare Grundoperatoren von Relevanz, welche in Abbildung 2.8 dargestellt sind.



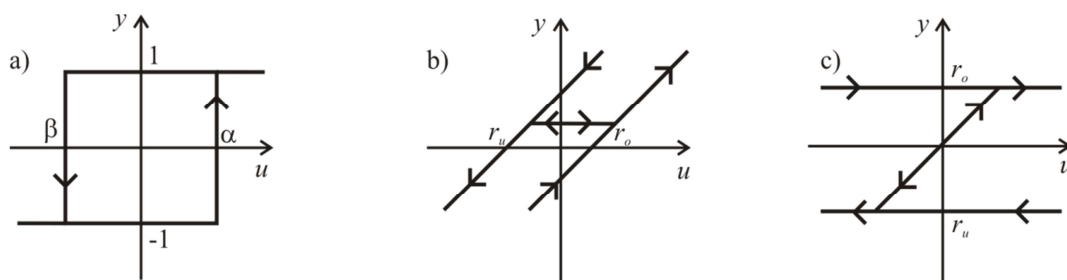


Abbildung 2.8 Elementare Hystereseeoperatoren: a) Relais-Operator, b) Play-Operator, c) Stop-Operator [57], [58].

Der in Abbildung 2.8 a) dargestellte Relais-Operator nimmt beim Überschreiten eines Schwellwertes  $\alpha$  den Ausgangswert  $+1$  und beim Unterschreiten eines Schwellwertes  $\beta$   $-1$  für den Ausgangswert an. Weitere Funktionswerte können nicht angenommen werden. Der Play-Operator, welcher häufig auch als Krasnosel'skii-Pokrovskii-Operator oder Backlash-Operator bezeichnet wird, ist durch eine untere Funktion  $r_u$  und ein obere Funktion  $r_o$  begrenzt. In Abbildung 2.8 b) ist ein lineares Polynom als Begrenzungsfunktion gewählt. Ein Wechsel zwischen den beiden Begrenzungspolynomen erfolgt nach einer Änderung des Eingangssignals bei konstantem Ausgangswert. Der Stop-Operator, welcher in Abbildung 2.8 c) dargestellt ist, stellt eine Sättigung dar. Der Wertebereich des Operators wird durch ein oberes und ein unteres Begrenzungspolynom beschränkt, welches in Abbildung 2.8 c) wiederum als konstante angenommen ist. Es ist offensichtlich, dass sich die Operatoren durch die Wahl von geeigneten Begrenzungsfunktionen ineinander überführen lassen, so dass eine Klassifizierung bei erweiterten Hystereseeoperatoren häufig schwierig ist.

Zum mathematischen Abbilden eines realen, physikalischen Phänomens besteht zum einen die Möglichkeit einen der dargestellten Hystereseeoperatoren durch eine geschickte Wahl von Begrenzungsfunktionen direkt an das zu modellierende Phänomen anzupassen. Hierbei sind die Möglichkeiten der Anpassbarkeit jedoch stark beschränkt.

Eine allgemeinere Methodik, welche es ermöglicht nahezu beliebige Hysteresephänomene abzubilden, ist die Überlagerung einer gewissen Anzahl von elementaren Hystereseeoperatoren unter Verwendung individueller Schaltschwellen.

### 2.7.2 Aktormodellierung unter Verwendung des Preisach-Hysteresemodells

Durch eine gewichtete Überlagerung von Relais-Operatoren mit individuellen Schaltschwellen erhält man das klassische Preisach-Hysteresemodell (CPM), welches auf F. Preisach zurückgeht [59] und in Abbildung 2.10 dargestellt ist. Dieses wurde ursprünglich zur Modellierung der ferromagnetischen Hysterese entwickelt. Entscheidend weiterentwickelt wurde das CPM von D. H. Everett, welcher sich mit Hysterese bei chemischen Absorptionsprozessen beschäftigte und zur Beschreibung dieser ein Hysteresemodell entwickelte [60], [61], [62], [63]. Völlig losgelöst von physikalischen, beziehungsweise chemischen Vorgängen wurde das Preisach-Hysteresemodell vom russischen Mathematiker Krasnoselskii [64] untersucht. Dieser unterstreicht die universelle Einsetzbarkeit des Ansatzes. Wesentliche Beiträge zur praktischen Anwendbarkeit des CPM wurden

---

von Mayergoyz et al. geleistet. In [65] stellt dieser basierend auf einer geometrischen Interpretation des Operators eine effiziente Möglichkeit zur numerischen Implementierung des CPM vor. In [66] erläutert er für die Regelungstechnik relevante Eigenschaften und gibt grundlegende Hinweise zur Identifikation der notwendigen Modellparameter und der Anwendbarkeit des Preisach-Hysteresemodells. Von großer Bedeutung für diese Arbeit ist die in [67] vorgestellte energetische Interpretation des Preisach-Hysteresemodells. Wie in Abschnitt 2.9 ausführlich erläutert wird, lässt sich mit dem CPM, die mit dem modellierten Hysteresephänomen verbundene Verlustenergie auf numerisch effiziente Weise berechnen. Eine sehr gute Übersicht über Erweiterungen des CPM findet sich in der von Mayergoyz verfassten Monographie über das Preisach-Modell [35]. In dieser Arbeit werden unter anderem eine vektorielle Erweiterung des CPM vorgestellt sowie Anwendungsbeispiele gegeben. Die energetische Interpretation des Preisach-Hysteresemodells wird auch von Bertotti aufgegriffen. Dieser befasst sich mit der ferromagnetischen Hysterese und stellt einen generellen Zusammenhang zwischen der irreversiblen Thermodynamik und dem Preisach-Hysteresemodell her. Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist eine mathematische Analogie zwischen der in der Physik üblichen Modellierung des Barkhausen Effekts und dem CPM [68], [69]. Der magnetische Barkhausen Effekt bezeichnet die diskontinuierliche Änderung der Magnetisierung von ferromagnetischen Werkstoffen bei einem Wechsel des magnetischen Feldes [70]. In [71] stellt Bertotti umfassend eine thermodynamisch konsistente Theorie ferromagnetischer Materialien vor. Dabei verwendet er das Preisach-Hysteresemodell, um die mit der ferromagnetischen Hysterese einhergehende Entropieproduktion abzubilden. Hughes und Wen [72] sowie Hu und Mrad [48] befassen sich mit der Anwendbarkeit der CPM auf piezoelektrische Materialien. In [72] wird eine gute Übereinstimmung zwischen den durch das Preisach-Modell vorhergesagten inneren Hystereseschleifen und dem realen Aktorverhalten festgestellt. Als Beleg für die Eignung des Operators werden auch die guten Ergebnisse bei der Linearisierung eines piezoelektrischen Aktors [73] mit einem inversen CPM gewertet. Die Beurteilung der Eignung des CPM in [48] fällt differenzierter aus. Eine hohe Modellgüte ergibt sich demnach nur unter der Voraussetzung verschwindender mechanischer Lasten sowie unter der Bedingung, dass die Signalfrequenz in der Simulation nahe der Frequenz der bei der Identifikation der Parameter des CPM liegenden Messfrequenz liegt. Ursache hierfür ist, dass das CPM die in Abschnitt 2.6.3 dargestellten zeitlichen Effekte nicht abbilden kann sowie dass es sich beim CPM um ein Single input-Single output (Si-So) Modell handelt. Dies bedeutet, dass das CPM nur den Zusammenhang zwischen einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße darstellen kann. Die piezoelektrische Hysterese hängt jedoch, wie aus den linearen Grundgleichungen unschwer zu erkennen ist, stets von mehreren Eingangsgrößen ab. Deshalb nimmt die Modellqualität des CPM bei stark variierenden mechanischen Lasten sowie bei drastischen Frequenzabweichungen deutlich ab. Dennoch attestieren Hu und Mrad dem CPM eine grundsätzliche Eignung zur Abbildung der piezoelektrischen Hysterese. Die Eignung des CPM zur Linearisierung piezoelektrischer Aktoren wird nochmals in [74] unterstrichen. Hierin wird in Verbindung mit einem PID-Regler eine auf dem CPM basierende Vorsteuerung zur Linearisierung des Aktorverhaltens untersucht. Dabei ergeben sich mit der Vorsteuerung erheblich bessere Ergebnisse als ohne. Ähnliche Ergebnisse finden sich in

---

[75]. In [76] werden zwei diskrete, echtzeitfähige Invertierungsmethoden für das CPM vorgestellt, welche ebenfalls erfolgreich zur Optimierung einer Folgeregelung eingesetzt wurden. Eine iterative Inversionsstrategie findet sich in [77], eine FPGA (Field Programmable Gate Array) taugliche Strategie wird in [78] vorgestellt. Nachdem die grundsätzliche Eignung des CPM zur Modellierung von Piezoaktoren nachgewiesen ist, wurden einige Erweiterungen entwickelt, welche die Modellqualität weiter erhöhen. So erweitern Jung et al. das CPM um eine logarithmische Kriechfunktion [79], um das niederfrequente Kriechen abzubilden. Kuhn und Krejci [47] entwickeln einen Preisach-Kriech Operator und weisen dessen Eindeutigkeit und Stabilität nach. Hu et. al [80] erweitern das CPM darüber hinaus um eine Frequenzabhängigkeit, so dass es für einen weiten Frequenzbereich gute Modellierungsergebnisse liefert.

Sehr interessant sind auch die Ergebnisse der Arbeitsgruppe von Prof. Dr.-Ing. R. Lerch, welche im folgenden Absatz zusammengefasst werden: Hegewald stellt einen thermodynamisch motivierten Ansatz für piezoelektrische Aktoren in ihrem typischen Arbeitsbereich vor [81]. Dieser basiert auf einer Zerlegung der elektrischen Flussdichte  $D$  und der Dehnung  $S$  in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil. Diese Idee geht auf die sehr grundlegenden Arbeiten von Bassiouny et al. zurück [82],[83]. Der reversible Anteil wird durch die, in Abschnitt 2.2 hergeleiteten, linearen Piezogleichungen abgebildet. Die irreversiblen Anteile werden mit dem CPM und dem Jiles-Atherton Modell, welches unten näher erläutert wird, modelliert, wobei das CPM bessere Ergebnisse liefert. Zur Abbildung des niederfrequenten Kriechens des Aktors superponiert Hegewald einen Kriechoperator. Eine FEM-Implementierung des von Hegewald entwickelten Modells wird in [84] vorgestellt. Sutor erweitert das CPM durch die Verwendung einer nur von vier Parametern abhängigen kontinuierlichen und analytischen Gewichtungsfunktion zur Überlagerung der einzelnen Relais-Operatoren [85]. Außerdem gibt er Hinweise zur Ermittlung dieser Parameter aus Messdaten. Wolf greift die Idee von Sutor auf und kombiniert sie zunächst mit einem Drift-Operator, um das niederfrequente Verhalten abzubilden [86]. Um auch das frequenzabhängige Verhalten des Aktors bei höheren Frequenzen zu beschreiben, führt Wolf in [87] zusätzlich eine frequenzabhängige Gewichtungsfunktion ein. In [88] und [89] verwendet er die Vorteile der analytischen Gewichtungsfunktion, um das vorspannungsabhängige Verhalten eines Stapelaktors zu beschreiben.

---

### 2.7.3 Aktormodellierung unter Verwendung des Prandtl-Ishlinskii Modells

---

Eine gewichtete Überlagerung von Play- beziehungsweise Stop-Operatoren führt auf das so genannte Prandtl-Ishlinskii-Modell (PIM) vom Play- oder Stop-Typ je nachdem welcher Operator gewählt wurde. Das PIM zeichnet sich durch eine besonders einfache Invertierbarkeit aus. Ein inverser PI-Operator entspricht wiederum einem PI-Operator, so dass die Berechnungsvorschrift für den inversen und den direkten PI-Operator identisch sind. Darüber hinaus lässt sich der Operator analytisch berechnen [90], was eine einfache Implementierung in Echtzeitsystemen ermöglicht [91],[92]. Deshalb wird der PI-Operator häufig zur Linearisierung von neuartigen Aktuatoren eingesetzt. Da der Play-Operator, wie in Abbildung 2.8 b) dargestellt ist, nicht beschränkt ist, lassen

---

sich mit dem klassischen Prandtl-Ishlinski-Modell vom Play-Typ nur Hysterese Phänomene ohne Sättigungseffekte abbilden. Deshalb sind Kombinationen aus PI-Operatoren vom Stop-Typ und Play-Typ üblich [91]. Alternativ lassen sich die oberen und unteren Begrenzungskurven geeignet wählen. In diesem Fall wird dann von einem generalisierten PI-Operator gesprochen. Einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung der für Piezoaktoren relevanten Generalisierungen gehen auf die Arbeiten von Ang et al. zurück. Dieser beschreibt zunächst einen ratenabhängigen PI-Operator [93] zur Modellierung von Piezoaktoren inklusive der dazu gehörigen Invertierungsvorschrift. Darüber hinaus verfasst er diverse Veröffentlichungen zum Thema singularitätsfreier Invertierung des PI-Operators bei schlecht konditionierten Hystereseschleifen [94],[95]. Von schlecht konditionierten Hystereseschleifen wird gesprochen, wenn der Ausgangswert des Operators bei abfallendem Eingangssignal zunächst weiter ansteigt. Darüber hinaus befasst er sich mit der Wechselwirkung zwischen mechanischer Strecke und Aktor. In [96] legt er ein Konzept vor, welches eine gemeinsame Modellierung von Aktor und mechanischer Regelstrecke erlaubt. Seine neuesten Veröffentlichungen befassen sich mit adaptiven PIM, welche sich eigenständig an Änderungen des Aktors bzw. der Regelstrecke anpassen [97],[98]. Ein wichtiger Beitrag zur Verwendung des PIM wurde ebenfalls von Al Janideh et al. geleistet. Dieser erweitert den Operator zunächst ebenfalls für die Abbildung ratenabhängiger Hysterese [99], wobei der von Al Janideh gewählte Modellansatz, im Vergleich zum Ansatz von Ang, für einen breiteren Frequenzbereich sowie für ratenabhängige asymmetrische Hystereseschleifen [100] gültig ist. In [49] wendet er erfolgreich seinen Generalisierungsansatz des PIM auf Piezostapelaktoren, magnetostriktive Aktoren und Formgedächtnislegierungen an. In [101] erweitert er den Operator für zeitabhängige Schwellwerte. Eine Inverse für diesen verallgemeinerten, zeitabhängigen Fall wird in [102] dargestellt. Von großer praktischer Bedeutung ist die Arbeit von Bashash und Jalili [103]. Diese kombinieren das PIM mit einer linearen mechanischen Bewegungsgleichung und erhalten so ein dynamisches Gesamtsystemmodell, welches sie zur Auslegung eines geeigneten Regelalgorithmus für eine Folgeregelung verwenden.

---

#### **2.7.4 Aktormodellierung unter Verwendung des Maxwell-Slip Modells**

---

Zur Klasse der Superpositionsooperatoren elementarer Hystereseelemente zählt auch das generalisierte Maxwell-Slip Modell (GMS)[104],[105]. Dieses kann auch als Sonderfall des Preisach-Hystereseeoperators aufgefasst werden [106]. Das elementare Hystereseelement, welches superponiert wird, ist beim GSM aus der Mechanik abgeleitet. Es besteht aus einem masselosen mit einer Feder gegen fest gelagerten, Reibelement. Die erste Verwendung des GSM zur Modellierung von piezoelektrischen Aktoren findet sich bei Goldfarb und Celanovic [107]. Diese verwenden das GSM-Modell zur ratenunabhängigen Beschreibung der  $D - E$  Hysterese. Die Übertragung des aus der Mechanik stammenden GSM-Modells auf elektrische Zusammenhänge ist aufgrund energetischer Betrachtungen ohne weiteres möglich. Goldfarb et al. nennen ihr elektrisches Analogon zum GSM-Modell „Maxwell-Resistive-Capacitance“ Modell (MRC) und weisen darauf hin, dass sich das Modell aufgrund seiner Eigenschaften gut für regelungstechnische Simulationen eignet. Die

Idee von Goldfarb und Celanovic wird von Choi et al. [108] zur Entwicklung einer „Feedback-Linearisierung“ eingesetzt. In [109] wird ein modifiziertes GMS Modell mit nichtlinearen Federn verwendet, um die  $S - E$  Hysterese eines Aktors mit höherer Qualität abzubilden. Georgiou et al. [106] verwenden das GMS ebenfalls zur Beschreibung der D-E Hysterese eines Stapelaktors. In [110] wird eine Reihenschaltung des GMS mit einem Kelvin-Voigt Modell untersucht, welches es erlaubt das ratenabhängige Kriechverhalten des Aktors abzubilden. Die bisher weitreichendste Modellierung von Piezoaktoren unter Verwendung des GMS findet sich bei Quandt et al. [111]. Dieser entwickelt zunächst mehrere Teilmodelle zur Beschreibung der Hysterese sowie für das dynamische Verhalten und vereint diese Teilmodelle anschließend zu einem umfassenden Aktormodell, welches die linearen Piezogleichungen vollständig ersetzen kann.

---

### 2.7.5 Aktormodellierung unter Verwendung von Differentialgleichungen

---

Bei der Modellierung von Hysterese mittels Differentialgleichungen ist vor allem die Klasse der Duhem-Modelle von Relevanz. Diese Modelle sind durch Differentialgleichungssystem vom Typ

$$\dot{x}(\tau) = f_{(x(\tau), u(\tau))} g_{(\dot{u}(\tau))} \text{ mit } x_{(0)} = x_0 \text{ und } \tau \geq 0 \quad (2.43)$$

und

$$y(\tau) = h_{(x(\tau), u(\tau))} \quad (2.44)$$

gegeben. Zur Klasse der Duhem-Modelle gehören das Madelung-Modell [112], das Dahl-Reibungsmodell [113], das Lu Gre-Reibungsmodell [114] und das „Presliding-friction-model“ [115], welche wie die Modellnamen bereits nahe legen überwiegend zur Reibungsmodellierung eingesetzt werden sowie das Bouc-Wen-Modell, welches bereits häufiger zur Modellierung piezoelektrischer Aktoren eingesetzt wurde.

Ein guter Überblick über die Anwendungen des Bouc-Wen Modells wird in [116] gegeben. Low et al. [117] verwenden das Bouc-Wen Modell zur Modellierung eines piezoelektrischen Biegeaktors und weisen darauf hin, dass sich das Modell auch für andere piezoelektrische Aktoren eignet. In [118] wird ein Bouc-Wen Modell basierter Hysteresebeobachter in Verbindung mit einem PI-Regler zur Verbesserung der Positioniergenauigkeit eines piezoaktuierten Präzisionstisches verwendet. Eine auf dem Bouc-Wen Modell basierende Vorsteuerung wird in [119] zur Optimierung eines piezoelektrischen Positioniersystems verwendet. Zhu et al. [120] erweitern das Bouc-Wen Modell für asymmetrische Hysterese und weisen nach, dass sich mit dem modifizierten Modell eine höhere Modellgüte bei der Modellierung von Piezostapelaktoren erreichen lässt. In [121] wird das Bouc-Wen Modell erfolgreich zur Modellierung eines Piezo-Patches eingesetzt. Yu [122] modelliert die  $S-E$  Hysterese eines Stapelaktors und legt mit Hilfe des Modells einen Fuzzy-Regler aus. Seltener als das Bouc-Wen Modell wird das Dahl-Reibungsmodell zur Modellierung von Piezostapelaktoren verwendet, wobei Dahl selbst als erstes sein Reibungsmodell zur Modellierung der piezoelektrischen  $S - E$  Hysterese anwendet [123]. Diese Idee wird von Wang [124] aufgegriffen, welcher das Modell um eine Temperaturabhängigkeit erweitert und es zur

---

Modellierung eines Stapelaktors für ein KFZ-Einspritzsystem einsetzt.

Ebenfalls zur Klasse der Differentialgleichungsmodelle gehört das Jiles-Atherton Modell (JAM) [125],[126], welches wie das Preisach-Modell physikalisch motiviert ist und zunächst zur Modellierung der ferromagnetischen Hysterese eingesetzt wurde. Das Modell zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass nur 5 Parameter zur Beschreibung der Hysteresekurve notwendig sind. Smith et al. beschäftigen sich ausführlich mit der Übertragbarkeit des Modells auf die ferroelektrische Hysterese [127]. Er kommt zu dem Ergebnis, dass das Jiles-Atherton Modell für beliebige Ferroelektrika einsetzbar ist [128] und weist in [129] eine hohe Modellqualität für die bipolare D-E Hysterese von unterschiedlichen PZT-Materialien nach. Auch Hegewald prüft die Eignung des Jiles-Atherton Modells zur Abbildung der D-E Hysterese und vergleicht dieses wie bereits oben erläutert mit dem CPM. Er stellt fest, dass das Jiles-Atherton Modell bei der Abbildung der bipolaren Hysterese schnell zu guten Ergebnissen führt. Für die unipolare Hysterese erhält er jedoch ausschließlich nicht zufriedenstellende Ergebnisse [130], [81]. Deshalb empfiehlt Hegewald die Verwendung des CPM, obwohl dieses eine aufwändigere Parameteridentifikation benötigt. Zu einem vergleichbaren Ergebnis kommt auch die vom Verfasser dieser Arbeit betreute Studienarbeit von Wang [131]. Folglich stellt das Jiles-Atherton Modell für die Modellierung von Stapelaktoren, welche typischerweise unipolar betrieben werden, einen suboptimalen Lösungsansatz dar.

---

## **2.7.6 Weitere mathematische Ansätze zur Aktormodellierung**

---

Ungewöhnlich ist der Ansatz von Dang und Tan [132], welche ein kombiniertes Modell bestehend aus einem neuronalen Netz und einem Hysteresemodell verwenden. Dabei wird das neuronale Netz zur Abbildung der Phasenverschiebung und zur Anpassung der Amplitude des vorgeschalteten Hysterese Modells verwendet. Die mit diesem Ansatz erreichbare hohe Modellgüte wird durch den Abgleich mit Messdaten nachgewiesen.

Ebenfalls schwer zu klassifizieren ist der Ansatz von Badel [133]. Er verwendet je eine hyperbolische Funktionen zur Beschreibung des ansteigenden und des abfallenden Hystereseastes, welche über geeignete Transformationen an das aktuelle Eingangssignal angepasst werden. Er berücksichtigt ein nicht lokales Materialgedächtnis, so dass auch innere Hystereseschleifen abgebildet werden. Das Modell erreicht, eine Abbildbarkeit der Hystereseäste mit hyperbolischen Funktionen vorausgesetzt, trotz seines einfachen Aufbaus eine hohe Modellgüte. Artverwandt zum Ansatz von Badel ist die Vorgehensweise von Bashash et al. [134]. Dieser beschreibt zunächst die äußere Hystereseschleife mathematisch. Die inneren Hystereseschleifen werden durch eine Transformationsbeziehung aus den äußeren vorgegebenen Hysteresekurven ermittelt. Dabei ist die Transformationsbeziehung so aufgebaut, dass sich die inneren Kurven an die äußeren Hysteresekurven nach einem Exponentialgesetz anschmiegen. Durch Parameter in diesem Exponentialgesetz kann das Modell an das zu modellierende Verhalten angepasst werden. Bashash weist nach, dass sich das Modell sowohl zur Modellierung von magnetostriktiven als auch piezoelektrischen Materialien eignet.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das wissenschaftliche Interesse an der Modellierung



---

von piezoelektrischen Aktoren sehr groß ist. Dies wird vor allem durch die hohe Anzahl an Veröffentlichungen deutlich. In der jeweiligen Grundform der Modelle kann keines alle relevanten Phänomene abbilden. Die Vielzahl von Modellerweiterungen erlaubt die genauere Modellierung einzelner Phänomene. Ein Modell, welches alle relevanten Aspekte abbildet, gibt es jedoch bisher nicht.

---

## 2.8 Begründung der Verwendung des Preisach-Hysteresemodells

---

Wie bereits angedeutet wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit das klassische Preisach-Hysteresemodell (CPM) zur Modellierung der Aktorhysterese eingesetzt. Dies ist vor allem dadurch begründet, dass das CPM eine weitreichende energetische Interpretation erlaubt. So ist es zum Beispiel möglich, wie im kommenden Unterkapitel 2.9 erläutert wird, die mit der Hysterese verbundenen Verluste direkt durch das CPM zu berechnen [67]. Darüber hinaus lässt sich das CPM gut an Messwerte anpassen, so dass sich eine hohe Modellgüte ergibt. Des Weiteren gibt es durch das von Hegewald [81] vorgeschlagene Modell einen auf dem CPM basierenden Ansatz, welcher sich gut zum Erreichen der in dieser Arbeit angestrebten Ziele erweitern lässt.

Die im Vergleich zu den PIM eingeschränkten Möglichkeiten bei der Invertierung des CPM sind nicht entscheidend, da keine Linearisierung des Aktorverhaltens geplant ist, sondern Vorwärtssimulationen durchgeführt werden sollen. Stünde die Aktorlinearisierung im Vordergrund, wäre das PIM im Vorteil.

Eine ebenfalls gute Modellgüte versprechen auch die GMS bzw. MRC Modellansätze. Diese bieten jedoch, ähnlich wie das PIM, nicht die Möglichkeit der Berechnung der Aktorverluste.

Auch die auf Differentialgleichungen basierenden Modellansätze scheiden aus. Diese zeichnen sich zwar durch sehr wenige Modellparameter aus, lassen sich aber nur unzureichend an Messwerte anpassen. Außerdem ist der Berechnungsaufwand für die differentialgleichungsbasierten Modelle verhältnismäßig groß.

---

## 2.9 Grundlagen des klassischen Preisach-Hysteresemodells

---

Hier werden nun ausführlich die wesentlichen Eigenschaften des Preisach-Hysteresemodells erläutert, wobei weitgehend der Argumentation in [35] gefolgt wird.

Allgemein stellt der Operator einen funktionalen Zusammenhang zwischen einer Eingangsgröße  $u_{(\tau)}$  und einer hysteresebehafteten Ausgangsgröße  $y_{(\tau)}$  her.

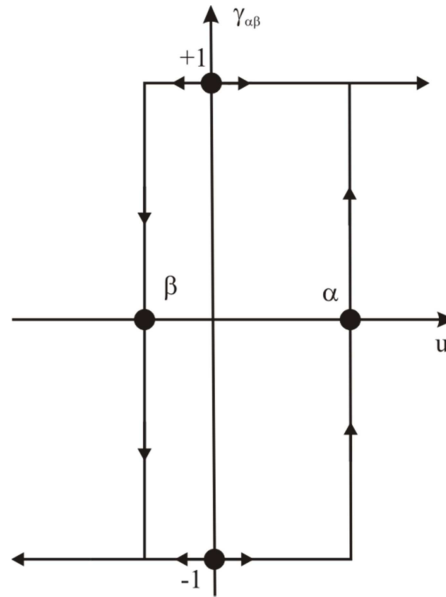


Abbildung 2.9 Ein einzelnes Hysterion, elementarer Baustein des Preisach-Hysteresemodells [35].

Anschaulich betrachtet handelt es sich beim Preisach-Hysteresemodell um eine Überlagerung von unendlich vielen elementaren Hystereseschleifen, so genannte Hysterionen. Jedes Hysterion besitzt die in Abbildung 2.9 dargestellte Rechteckform und unterscheidet sich lediglich in seiner Hochschaltschwelle  $\alpha$  und der Rückschaltschwelle  $\beta$  von den anderen Hysterionen. Dabei existiert in der Modellvorstellung eine unendliche Anzahl unterschiedlicher Hysterionen. Einzige Bedingung ist, dass die Hochschaltschwelle  $\alpha$  des Hysterions größer gleich der Rückschaltschwelle  $\beta$  ist:

$$\alpha \geq \beta. \quad (2.45)$$

Als Ausgangswerte  $\gamma_{\alpha\beta}$  kann jedes Hysterion die Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen. Es wird deshalb auch häufig von aktivierten (Zustand  $+1$ ) und deaktivierten Hysterionen (Zustand  $-1$ ) gesprochen. Zur Anpassung des Gesamtoperators an Messwerte wird wie in Abbildung 2.10 schematisch dargestellt jedes Hysterion mit einem individuellen Gewicht  $\mu$  multipliziert. Zur eindeutigen Zuordnung der Gewichte zu den einzelnen Hysterionen werden die Schaltschwellen der Hysterionen  $\alpha$  und  $\beta$  verwendet. Aus der Gesamtmenge aller Gewichte ergibt sich die so genannte Preisachdichtefunktion  $\mu_{(\alpha,\beta)}$ . Diese ist zunächst aufgrund der in Gleichung (2.45) definierten Bedingung nur auf einer dreiecksförmigen Halbebene definiert. Durch das maximale und minimale vom Operator abzubildende Eingangssignal  $u_{max}$  beziehungsweise  $u_{min}$  wird der Definitionsbereich der Preisachdichtefunktion  $\mu_{(\alpha,\beta)}$  weiter auf eine Dreiecksfläche  $T_p$  reduziert.



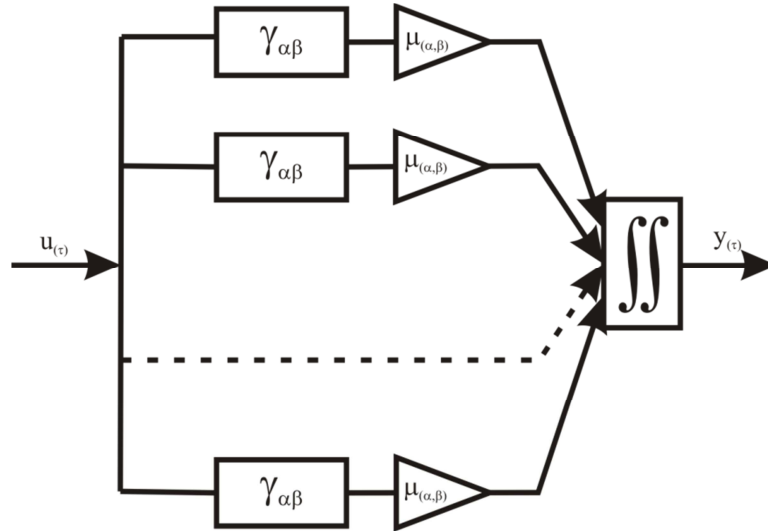


Abbildung 2.10 Überlagerung einer unendlichen Anzahl von Hysteronen [35].

Somit ist der Preisach-Operator mathematisch durch den folgenden Ausdruck definiert

$$y_{(\tau)} = \iint_{T_p} \mu_{(\alpha,\beta)} \gamma_{\alpha\beta} u_{(\tau)} d\alpha d\beta. \quad (2.46)$$

Das Wesen des Operators erschließt sich jedoch erst nach einer geometrischen Interpretation. Bei dieser wird der Aktivierungszustand der Hysteronen über einem durch die Schaltschwellen  $\beta$  und  $\alpha$  aufgespannten kartesischen Koordinatensystem aufgetragen.

Ausgangspunkt der geometrischen Interpretation ist die so genannte negative Sättigung. Dabei nimmt der Eingangswert  $u_{(\tau)}$  den minimalen abbildbaren Wert  $u_{min}$  an. Alle Hysteronen sind deaktiviert. Eine stetige Erhöhung der Eingangsgröße  $u_{(\tau)}$  führt zu einer Aktivierung aller Hysteronen dessen Einschaltsschwelle  $\alpha$  kleiner als  $u_{(\tau)}$  ist. Wie in Abbildung 2.11 a) dargestellt bilden sich durch diese Erhöhung zwei Teilbereiche auf der oben erwähnten Dreiecksfläche  $T_p$  aus. Unterhalb einer horizontalen Linie im Gebiet  $S_+$  sind alle Hysteronen aktiviert. Oberhalb der Linie im Bereich  $S_-$  sind alle Hysteronen weiterhin deaktiviert. Ein weiteres Erhöhen des Eingangssignals  $u_{(\tau)}$  führt zu einem Verschieben der Linie nach oben. Die Verschiebung der horizontalen Linie endet dann, wenn ein lokales Maximum des Eingangssignals  $u_{l,max}$  erreicht ist.

Reduziert sich anschließend das Eingangssignal wieder werden alle Hysteronen deren Abschaltsschwellwert größer als  $u_{(\tau)}$  ist, deaktiviert. Geometrisch gesehen entspricht dies wie in Abbildung 2.11 b) gezeigt einer weiteren vertikalen Linie, welche sich von rechts nach links auf der Preisachfläche  $T_p$  bewegt. Die Bewegung der vertikalen Linie nach links stoppt erst dann, wenn ein lokales Minimum des Eingangssignals  $u_{l,min}$  erreicht ist. Erfolgt anschließend ein erneuter Anstieg der Eingangsgröße  $u_{(\tau)}$  entsteht wie in Abbildung 2.11 c) dargestellt eine neue horizontale Linie, welche sich erneut von unten nach oben auf der Preisach-Fläche  $T_p$  bewegt. So bildet sich zwischen den Teilflächen  $S_+$  und  $S_-$  eine treppenförmige Kontur aus. Eine solche Kontur ist exemplarisch in Abbildung 2.11 d) dargestellt. Diese Kontur spiegelt die gesamte relevante Belastungsgeschichte des

Modells wider. Folglich reicht es aus diese Kontur  $L(\tau)$  abzuspeichern, wobei diese bereits durch die in Abbildung 2.11 d) grau markierten Eckknoten vollständig definiert ist. Auf ein Abspeichern des individuellen Schaltzustandes eines jeden einzelnen Hysterons kann verzichtet werden.

Im bisherigen Verlauf wurde nur die Entstehung neuer Eckknoten in der Kontur  $L(\tau)$  erläutert. In zwei Situationen werden jedoch auch Konten aus der Kontur  $L(\tau)$  gelöscht. Dies tritt zum einen auf, wenn bei ansteigendem Eingangssignal der momentane Wert von  $u(\tau)$  die  $\alpha$  Koordinate der Knotens von  $L(\tau)$  überschreitet, zum anderen dann, wenn bei abfallendem Eingangssignal der momentane Wert von  $u(\tau)$  die  $\beta$  Koordinate des Knotens unterschreitet.

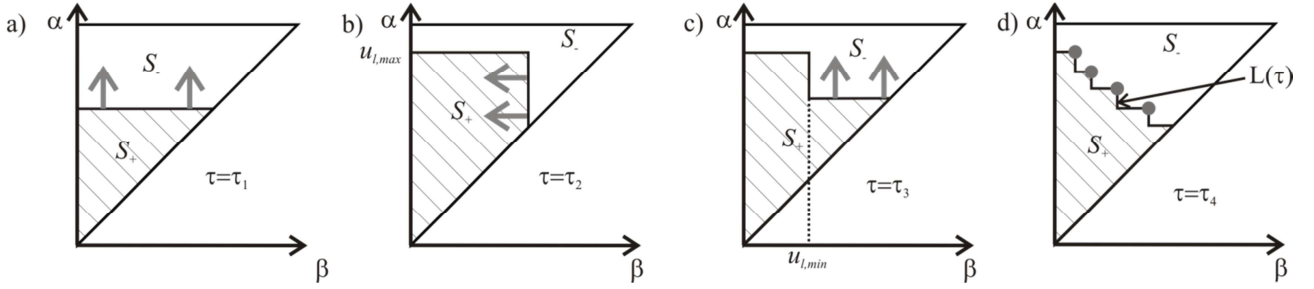


Abbildung 2.11 Geometrische Interpretation des Preisach-Hysteresemodells.

Die Berechnung des Doppelintegrals in Gleichung (2.46) ist numerisch aufwändig, vor allem da sie in jedem Simulationszeitschritt erfolgen muss. Auch hier ermöglicht die geometrische Interpretation eine erhebliche Reduktion des Berechnungsaufwandes [65]. Nach dem Ersetzen von  $\gamma_{\alpha\beta}$  durch  $+1$  im Gebiet  $S_+$  und  $-1$  im Gebiet  $S_-$  und einer einfachen Umformung ergibt sich aus (2.46)

$$y(\tau) = - \int_{T_p(u_{max}, u_{min})} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta + 2 \iint_{S_+} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta. \quad (2.47)$$

Der erste Term in Gleichung (2.47) ist konstant, so dass eine einmalige Berechnung ausreicht. Das Integral über das Gebiet  $S_+$  lässt sich bei abfallendem Eingangssignal  $u(\tau)$  durch Integrale über Trapeze beziehungsweise bei ansteigendem Eingangssignal  $u(\tau)$  wie in Abbildung 2.12 a) gezeigt in Integrale über Trapeze und ein Dreieck darstellen. Die Integralwerte über die Trapezflächen können wiederum aus der Subtraktion von Integralwerten über Dreiecksflächen ermittelt werden. So findet sich für (2.47) bei ansteigendem Eingangssignal  $u(\tau)$  die äquivalente Darstellung

$$y(\tau) = -F_{(u_{max}, u_{min})} + 2 \sum_{k=1}^{n(\tau)-1} (F_{(M_k, m_{k-1})} - F_{(M_k, m_k)}) + 2F_{(u(\tau), m_{n(\tau)-1})} \quad (2.48)$$

mit den Integralen über die Teildreiecksflächen

$$F_{(\alpha, \beta)} = \iint_{T_p(\alpha, \beta)} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta. \quad (2.49)$$

Der erste Term in (2.48) entspricht dem ersten Term von Gleichung (2.47) und ist somit weiterhin konstant. Der Summenterm in Gleichung (2.48) geht aus den Integralen über die trapezförmigen Teilflächen hervor, wobei jeder Summand einer trapezförmigen Teilfläche der  $n$  Teilflächen entspricht. Die Integrale über die trapezförmigen Teilflächen werden, wie in Abbildung 2.12 b) schematisch angedeutet, als Differenz zweier Integrale über Teildreiecksflächen dargestellt. Die Koordinaten  $M_i, m_j$  können jeweils der Kontur  $L_{(\tau)}$  entnommen werden. Der letzte Term in Gleichung (2.48) repräsentiert das Integral über die  $n$ -te Teilfläche, welches dreiecksförmig und nur bei ansteigendem Eingangssignal vorhanden ist. Für abfallende Eingangssignale lässt sich eine zu Gleichung (2.48) äquivalente Summendarstellung finden.

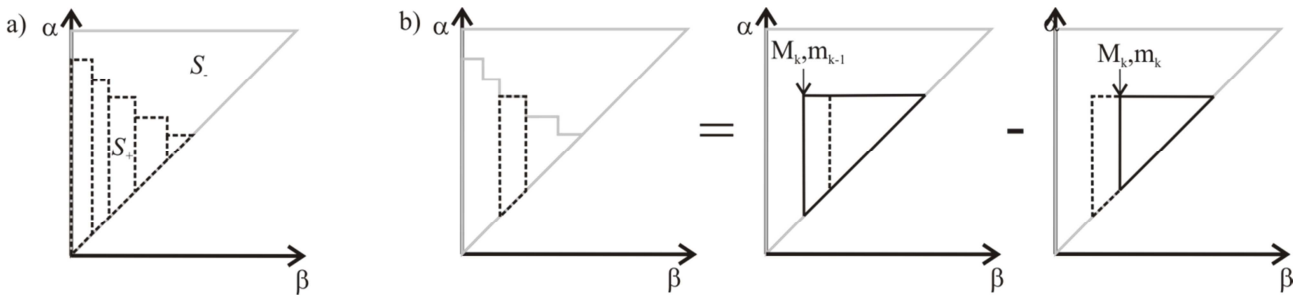


Abbildung 2.12 a) geometrische Aufteilung der Integrationsfläche in Trapeze und Dreiecke b) Darstellung von Integralwerten über Trapezflächen durch Integrale über Dreiecksflächen.

Die Integrale  $F_{(\alpha,\beta)}$  über die Teildreiecksflächen  $T_{p(\alpha,\beta)}$  lassen sich experimentell direkt bestimmen. In der praktischen Umsetzung des CPM werden deshalb eine gewisse Anzahl an Integralwerten  $F_{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}$  experimentell ermittelt und in Kennfeldern abgelegt. Diese Kennfelder werden auch als Everett-Flächen bezeichnet. Mittels geeigneter Interpolationsverfahren lassen sich aus diesen Kennfeldern beliebige Näherungswerte für  $F_{(\alpha,\beta)}$  berechnen. Eine Kenntnis beziehungsweise experimentelle Bestimmung der Preisachdichtefunktion  $\mu_{(\alpha,\beta)}$  selbst ist deshalb nicht notwendig. Durch diese Vorgehensweise ergibt sich eine numerisch sehr effiziente Umsetzung des Operators. In jedem Zeitschritt müssen nicht, wie Gleichung (2.46) suggeriert, Doppelintegrale gelöst werden, sondern ausschließlich Summengleichungen vom Typ der Gleichung (2.48) berechnet werden. Vorteile bietet der Preisach-Operator insbesondere hinsichtlich der Abbildung von Verlusten [21]. Allgemein bekannt ist, dass der mit einem Hysteresephänomen verbundene Energieverlust proportional zur Fläche der Hystereseschleife ist. So ergibt sich beim einmaligen An- und Abschalten eines einzelnen Hysterons (siehe Abbildung 2.9) mit den Schaltschwellen  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  die Verlustarbeit

$$Q_H = 2 (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}). \quad (2.50)$$

Bewegt sich der Eingangswert  $u_{(\tau)}$  entlang der horizontalen Linien des Hysterons, treten offensichtlich keine Verluste auf. Der Argumentation in [21] folgend können die Verluste deshalb nur während der diskreten Hoch- und Rückschaltvorgänge erfolgen. Aufgrund der Symmetrie des Operators zur  $\beta$ -Achse muss der Energieverlust beim Hochschalten gleich dem Energieverlust beim

Rückschalten sein. Für einen einzelnen Schaltvorgang eines mit dem Gewicht  $\mu_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$  gewichteten Hysterons ergibt sich somit

$$Q_{SW} = \mu_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}). \quad (2.51)$$

Bei der Änderung des Eingangssignals  $u_{(\tau)}$  werden in der Regel mehrere Hysterone gleichzeitig geschaltet. Die dabei umgesetzte Verlustarbeit entspricht dabei stets der Summe der Verlustarbeit der einzelnen geschalteten Hysterone. Werden während einer Eingangssignaländerung alle Hysterone welche sich auf der Teilfläche  $\Omega$  der Preisachebene  $T_p$ , befinden einmalig geschaltet so ergibt sich für die Verlustarbeit

$$Q_{(\Omega)} = \iint_{\Omega} \mu_{(\alpha,\beta)} (\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.52)$$

Analog zur Berechnung von Gleichung (2.47) lässt sich die Berechnung der Doppelintegrale in Gleichung (2.52) vermeiden, indem vorab die mit Dreiecksflächen verbundenen Verluste berechnet und in Kennfeldern abgelegt werden. Entspricht das Gebiet  $\Omega$  dem Gebiet aller aktivierten Hysterone  $S_+$  so findet sich bei ansteigendem Eingangssignal  $u_{(\tau)}$

$$Q_{(S_+)} = \sum_{k=1}^{n_{(\tau)}-1} (Q_{(M_k, m_{k-1})} - Q_{(M_k, m_k)}) + Q_{(u_{(\tau)}, m_{n_{(\tau)}-1})} \quad (2.53)$$

und bei abfallendem Eingangssignal  $u_{(\tau)}$

$$Q_{(S_+)} = \sum_{k=1}^{n_{(\tau)}-1} (Q_{(M_k, m_{k-1})} - Q_{(M_k, m_k)}) + Q_{(M_{n_{(\tau)}}, m_{n_{(\tau)}-1})} - Q_{(M_{n_{(\tau)}}, u_{(\tau)})} \quad (2.54)$$

mit den Integralen über die Teildreiecksflächen

$$Q_{(\alpha,\beta)} = \iint_{T_{p(\alpha,\beta)}} \mu_{(\alpha,\beta)} (\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.55)$$

Für Gleichung (2.55) lässt sich, wie in [21] hergeleitet eine Formulierung finden, welche ausschließlich auf experimentell erfassbaren  $F_{(\alpha,\beta)}$ -Werten beruht. Somit lässt sich  $Q_{(\alpha,\beta)}$  direkt aus der experimentell ermittelten Funktion  $F_{(\alpha,\beta)}$  berechnen.

Die mit einer Fläche  $S_+$  verbundene Verlustarbeit entspricht der Dissipationsarbeit, welche verrichtet werden würde, wenn vom aktuellen Zustand mit stetig abfallendem Eingangssignal  $u_{(\tau)}$  zum Zustand der negativen Sättigung  $u_{(\tau)} = u_{min}$  gefahren würde. Eine Aussage über die Verlustarbeit, welche beim Herbeiführen des aktuellen Zustandes verrichtet wurde, ist jedoch zunächst nicht möglich. Hierzu ist ein Umweg notwendig, welcher nachfolgend erläutert wird. Dabei wird exemplarisch das in Abbildung 2.13 a) dargestellte Eingangssignal betrachtet.

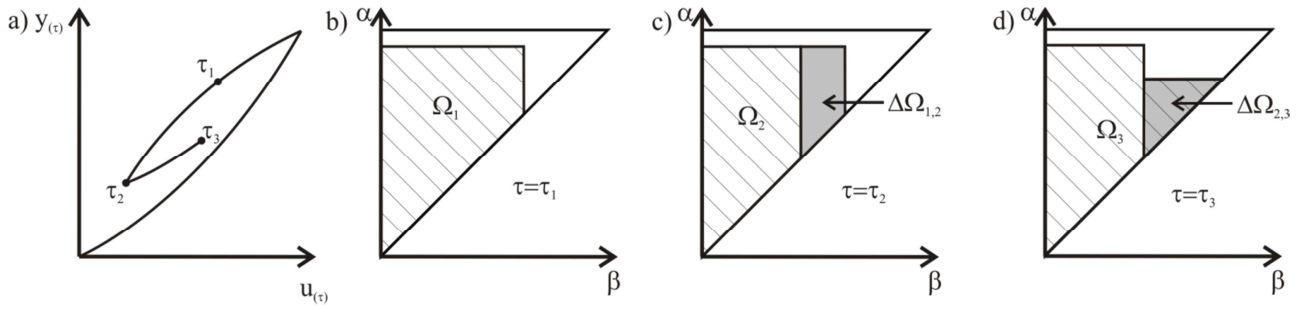


Abbildung 2.13 Zusammenhang zwischen Verlustarbeit und Verlusleistung.

Zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_1$ , dargestellt in Abbildung 2.13 b) sind alle Hysteronen, welche sich im Gebiet  $\Omega_1$  befinden, in der eingeschalteten Position. Zwischen den Zeitpunkten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  nimmt das Eingangssignal  $u_{(\tau)}$  kontinuierlich ab, so dass zum Zeitpunkt  $\tau = \tau_2$ , wie in Teilabbildung c) dargestellt, nur noch die Hysteronen des Gebiets  $\Omega_2$  eingeschaltet sind. Daraus folgt, dass beim Übergang von Zustand 1 zum Zustand 2 alle Hysteronen, welche sich auf der Fläche  $\Delta\Omega_{1,2}$  befinden, einmalig geschaltet wurden. Die mit dem Übergang von Zustand 1 zu Zustand 2 verbundene Verlustarbeit  $Q_{1,2}$  lässt sich aus der Differenz der mit den Flächen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  verbundenen Verlustarbeiten  $Q_{\Omega_1}$  und  $Q_{\Omega_2}$

$$Q_{1,2} = Q_{\Omega_1} - Q_{\Omega_2} \quad (2.56)$$

berechnen. Die mit den Flächen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  verbundene Verlustarbeiten  $Q_{\Omega_1}$  bzw.  $Q_{\Omega_2}$  würde dann verrichtet werden, wenn man das Eingangssignal  $u_{(\tau)}$  kontinuierlich auf Null absenken würde. Durch Beziehen der verrichteten Verlustarbeit auf die Zeit ergibt sich die Verlustleistung

$$\dot{Q}_{1,2} = \frac{Q_{\Omega_1} - Q_{\Omega_2}}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (2.57)$$

Im Grenzübergang hin zu beliebig kleinen Zeitintervallen erhält man

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta Q}{\Delta\tau} \right) = -\frac{\partial Q}{\partial \tau}. \quad (2.58)$$

Folglich entspricht bei abfallendem elektrischem Feld die Verlustleistung dem negativen Wert der zeitlichen Ableitung der mit der Fläche  $\Omega$  verbundenen Verluste.

Zwischen Zustand  $\tau_2$  und  $\tau_3$  nimmt das elektrische Feld kontinuierlich zu, so dass alle Hysteronen auf der Fläche  $\Delta\Omega_{2,3}$  einmalig geschaltet werden. Die mit diesen Schaltvorgängen verbundene Verlustarbeit ist gegeben durch

$$Q_{2,3} = Q_{\Omega_3} - Q_{\Omega_2}. \quad (2.59)$$

Durch erneutes berechnen der Verlustleistung findet sich

$$Q_{2,3} = \frac{Q_{\Omega_3} - Q_{\Omega_2}}{\tau_3 - \tau_2} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\partial Q}{\partial \tau}. \quad (2.60)$$

Im Gegensatz zum abfallenden elektrischen Feld entspricht die Verlustleistung bei steigendem elektrischem Feld dem positiven Wert der zeitlichen Ableitung der mit der Fläche  $\Omega$  verbundenen Verluste. Da die Verlustleistung immer positiv sein muss, bietet sich anstelle einer Fallunterscheidung die Verwendung der Betragsfunktion an. Zusammenfassend gilt dann für beliebige elektrische Felder

$$\dot{Q}_{(\tau)} = \left| \frac{\partial Q_{\Omega}}{\partial \tau} \right|. \quad (2.61)$$

Durch zeitliche Integration der nach (2.61) ermittelten Verlustleistung lässt sich die insgesamt verrichtete Verlustarbeit berechnen.

---

## 2.10 Verluste in Piezoaktoren und Eigenerwärmung

---

Ferroelektrische Materialien weisen charakteristische Verluste auf, welche in vielfältiger Weise untersucht und charakterisiert wurden. Eine an der Mikrostruktur orientierte Betrachtung der Verluste findet sich bei Haerdtl [28]. Er unterteilt die Verluste in vier grundlegende Gruppen. Zunächst werden durch Domänenwandbewegungen Verluste generiert. Darüber hinaus gibt es einen fundamentalen Gitteranteil, welcher auch in Monokristallen auftritt sowie einen Mikrostrukturanteil, welcher charakteristisch für Polykristalle ist. Außerdem entsteht durch den hohen, aber endlichen Widerstand von Keramikproben ein Verlustanteil durch Stromleitung. Bei Piezokeramiken dominiert jedoch stets der Domänenwandanteil. Einen Zusammenhang zwischen Verlusten und Eigenerwärmung stellt Haerdtl nicht her.

Im Gegensatz zu Haerdtl wählt Uchino eine von der Mikrostruktur losgelöste, eher makroskopische Betrachtungsweise [135]. Er unterscheidet lediglich zwischen dielektrischen, elastischen und piezoelektrischen Verlusten. Um die einzelnen Verlustkomponenten mathematisch abzubilden, führt Uchino komplexe Materialparameter ein, was der Annahme ellipsenförmiger Hysteresekurven entspricht. Wie sich die einzelnen Verlustanteile messtechnisch erfassen lassen, erläutert er in [20]. Ergebnis seiner Verlustanalyse ist, dass die dielektrischen, piezoelektrischen und elastischen Verluste nicht direkt messbar sind. Dies ist auf die materialtypischen Kopplungen in Piezokeramiken zurückzuführen. So führt das Anlegen eines elektrischen Feldes sowohl zu einer Änderung der Polarisierung als auch zu einer Dehnung. Folglich schließen die aus der D-E Hysterese gewonnenen Hystereseverluste nicht nur dielektrische, sondern auch piezoelektrische und elastische Verluste mit ein. Des Weiteren gibt Uchino Beziehungen an, welche es ermöglichen die makroskopisch messbaren Verluste in ihre physikalischen Ursachen aufzuspalten. Er stellt fest, dass die Gesamtverluste beim Betrieb des Aktors unterhalb der Resonanzfrequenz den  $D - E$  Hystereseverlusten entspricht. Zum Beschreiben der durch die Verluste erzeugten Heizleistung  $\dot{Q}_g$  unter nicht Resonanzbedingungen gibt er die folgende Beziehung

$$\dot{Q}_g = W_p f V_{eff} \quad (2.62)$$

an, wobei  $W_p$  der Fläche einer geschlossenen  $D - E$  Hysteresekurve entspricht,  $f$  steht für die Frequenz des angelegten elektrischen Feldes  $E$  und  $V_{eff}$  ist das aktivierte Keramikvolumen. Diese Heizleistung ist gleichmäßig über das Keramikvolumen  $V_{eff}$  verteilt, so dass sich eine gleichmäßige Erwärmung des Aktors ergibt. Beim Betrieb eines Aktors innerhalb oder nahe seiner Resonanzfrequenz dominieren die elastischen Verluste. Diese führen zu einer lokalen Erwärmung des Aktors an den Schwingungsknoten der jeweiligen Eigenform [136]. Dort treten die höchsten mechanischen Spannungen auf.

Bei Anwendungen der aktiven Schwingungsbeeinflussung werden die Aktoren stets weit unterhalb der Resonanzfrequenz betrieben, so dass für die Eigenerwärmung in solchen Anwendungen ausschließlich die  $D - E$  Hystereseverluste von Bedeutung sind. Diese Aussage wird untermauert von den Untersuchungen von Zheng [21]. Zheng ermittelt aus der Eigenerwärmung der Keramikproben die Gesamtverlustleistung und vergleicht diese mit der aus der  $D - E$  Hysterese ermittelten dielektrischen Verlustleistung. Die Messfrequenz beträgt 300 Hz und die Amplitude des elektrischen Feldes liegt bei 3 kV/mm. Der Aktor wird während der Messung nicht mechanisch beansprucht. Dabei stellt sich heraus, dass sich der Temperaturanstieg je nach Keramikmaterial zu 96,4 bis 97,95 % auf die dielektrischen Verluste zurückführen lässt.

Zu einem sehr ähnlichen Ergebnis wie Uchino kommen auch Senousy et al. [17]. Er befasst sich mit der Eigenerwärmung von Aktoren für Direkteinspritzsysteme von Dieselmotoren. Auch er führt die Eigenerwärmung der Aktoren bei hohen elektrischen Feldern und moderaten Frequenzen auf piezoelektrische und dielektrische Verluste zurück, welche er aus der  $S - E$  Hysterese bestimmt. Er weist aber ausdrücklich darauf hin, dass diese Vorgehensweise äquivalent zur Auswertung der  $D - E$  Hysterese ist. Zur Abbildung der Heizleistung gibt er die Gleichung

$$\dot{Q}_g = W_{SE} E_{ch} f \quad (2.63)$$

an, wobei  $f$  erneut die Frequenz des angelegten Feldes ist.  $W_{SE}$  entspricht der Fläche der  $S - E$  Hysterese und  $E_{ch}$  der durch das elektrische Feld bewegten Ladung.

Es lässt sich festhalten dass alle drei Autoren die Verluste als linear frequenzabhängig annehmen, was der Annahme konstanter Verluste pro Zyklus entspricht. Somit reicht ein statisches Hysteresemodell aus, um die Verlustleistung zu berechnen. Den Verlust pro Zyklus bestimmen die Autoren jeweils aus gemessenen Hysteresekurven.

---

## 2.11 Thermische Modellierung von Stapelaktoren

---

Aufgrund der im vorherigen Kapitel erläuterten Verluste erwärmt sich der Aktor je nach elektrischer Ansteuerung stark. Um diese Eigenerwärmung abzubilden, wird ein thermisches Aktormodell benötigt. Die einfachste Variante das thermische Verhalten eines Aktors abzubilden, ist die Verwendung eines Punktmassenmodells. Die mittlere Temperatur  $\Theta_{avg}$  des Aktors lässt sich dann mit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{Q}_g - \dot{Q}_t = m c \frac{d\Theta_{avg}}{d\tau} \quad (2.64)$$



berechnen. Hierin ist  $\dot{Q}_g$  die generierte Verlustleistung des Aktors,  $\dot{Q}_t$  die abgeführte Wärme,  $m$  die Masse und  $c$  die spezifische Wärmekapazität des Aktors und  $\frac{d\theta_{avg}}{d\tau}$  die Temperaturänderung pro Zeit. Die Idealisierung als Punktmasse führt dazu, dass der Temperaturgradient innerhalb des Aktors nicht berechnet werden kann.

Bei der Berechnung der Wärmeabfuhr  $\dot{Q}_t$  sind im Allgemeinen drei Mechanismen von Bedeutung. Als Erstes ist Wärmeleitung zu nennen. Diese tritt an den Stellen auf, an welchen der Aktor direkt im Kontakt mit einem Festkörper steht. Dies ist z. B. an den axialen End- bzw. Aufstandsflächen des Aktors der Fall. Der Wärmeübergang zwischen dem Aktor und der Umgebung ist je nach Oberflächenbeschaffenheit nicht ideal, so dass ein so genannter Kontaktwiderstand auftritt [137]. Sehr grundlegende Untersuchungen zum Thema Kontaktwiderstand finden sich in [138]. Eine Übersicht über bis heute gültige Erkenntnisse wird in [139] gegeben. Der Kontaktwiderstand hängt sowohl von der Rauigkeit der beiden Oberflächen als auch vom Anpressdruck ab. Neue Modelle könne beide Abhängigkeiten näherungsweise beschreiben [140].

An den Oberflächen, an welchen der Aktor von einem Fluid umgeben ist, tritt Konvektion auf. Bei diesem Wärmetransportmechanismus wird die thermische Energie durch eine vorbeistreichende Strömung abgeführt [141]. Es ist zwischen freier und erzwungener Konvektion zu unterscheiden. Bei der freien Konvektion entsteht die Strömung durch eine lokale Dichteänderung des den Aktor umgebenden Fluides. Diese Dichteänderung wiederum ist auf die lokale Erwärmung des Fluides in der direkten Umgebung des Aktor zurückzuführen. Bei erzwungener Konvektion wird die Strömung extern, z. B. durch ein Gebläse, aufgeprägt. Der durch erzwungene Konvektion entstehende Wärmeübergang ist aufgrund der dann höheren Strömungsgeschwindigkeiten normalerweise deutlich größer als der Beitrag durch freie Konvektion, so dass die freie Konvektion häufig vernachlässigt werden kann. Bei niedrigen Geschwindigkeiten der erzwungenen Strömung können freie und erzwungene Konvektion jedoch durchaus in der gleichen Größenordnung liegen. Man spricht dann von Mischkonvektion.

Der durch Konvektion hervorgerufene Wärmestrom an der Aktoroberfläche lässt sich beschreiben durch

$$\dot{Q}_{konv} = \alpha_{konv} A_{konv} (\theta_{surf} - \theta_{amb}). \quad (2.65)$$

Dabei steht  $\alpha_{konv}$  für den Wärmeübergangskoeffizienten,  $A_{konv}$  für die Größe der Fläche, an welcher Konvektion auftritt.  $\theta_{surf}$  und  $\theta_{amb}$  beschreiben die Wandtemperatur sowie die Temperatur des den Aktor umgebenden Fluides. Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{konv}$  gibt es eine Vielzahl von halbempirischen Näherungsgleichungen, so genannte Nusselt-Beziehungen [142], welche je nach den vorherrschenden Anströmbedingungen und der Anströmgeometrie Gültigkeit haben. Der Wärmeübergangskoeffizient ergibt sich dann mit der charakteristischen Anströmlänge  $l_c$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Materials zu

$$\alpha_{konv} = \frac{Nu \lambda}{l_c}. \quad (2.66)$$



Für einen vertikalen Zylinder bei freier Konvektion gilt nach [143]

$$Nu_{f,konv} = \left( \left( 0,825 + 0,387(Ra f_1)^{\frac{1}{6}} \right)^2 + 0,435 \frac{l_z}{d_z} \right) \quad (2.67)$$

mit

$$f_1 = \left( 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right)^{-\frac{16}{9}}. \quad (2.68)$$

Für einen horizontal angeströmten Zylinder gilt im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung nach [144]

$$Nu_{e,konv} = \frac{0,3 \lambda}{l} \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2} \quad (2.69)$$

mit

$$Nu_{lam} = 0,664 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (2.70)$$

und

$$Nu_{turb} = \frac{0,037 Re^{0,8} Pr}{\left( 1 + 2,443 Re^{-0,1} \left( Pr^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right)}. \quad (2.71)$$

Ob freie, erzwungene oder Mischkonvektion vorliegt, lässt sich anhand des Quotienten der Grashof-Zahl  $Gr$  zum Quadrat der Reynolds-Zahl  $Re$  bewerten. Dieser Quotient beschreibt das Verhältnis von Auftriebskräften zu Trägheitskräften in der den Akteur umgebenden Strömung. Für  $\frac{Gr}{Re^2} \ll 1$  überwiegt die erzwungene Konvektion, für  $\frac{Gr}{Re^2} \gg 1$  dominiert die freie Konvektion. Ist die Größenordnung von  $\frac{Gr}{Re^2} \approx 1$  spielen beide Konvektionsmechanismen eine Rolle. In geschlossenen Räumen liegen häufig Strömungsgeschwindigkeiten von 0,1 m/sec bis 0,3 m/sec vor, welche durch Lüftungen oder Gebäudeundichtigkeit entstehen und nicht wahrnehmbar sind. Um diese Verhältnisse abzubilden, können die Nusselt-Zahlen für freie und erzwungene Konvektion nach [145] wie folgt überlagert werden:

$$Nu_{fe,konv} = \left( Nu_{f,konv}^3 \pm Nu_{e,konv}^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.72)$$

Je nachdem ob die durch freie Konvektion entstehende Strömung und die erzwungene Strömung gleich- oder gegengerichtet sind, addieren oder subtrahieren sich die Teilnusseltzahlen.

Als dritter Wärmetransportmechanismus ist Wärmestrahlung zu nennen. Eine exakte Berechnung des Strahlungsaustausches ist sehr komplex und kann, wenn überhaupt, nur mit numerischen Methoden erfolgen. Dies liegt darin begründet, dass die von einer Fläche abgestrahlte Energiemenge sowohl von der Wellenlänge als auch von der Emissionsrichtung abhängt. Deshalb

geht man für eine näherungsweise Berechnung des Strahlungsaustausches in technischen Anwendungen meist von einem grauen Lambertz-Strahler und diffuser Reflexion aus. Für konstante Oberflächentemperaturen unter Annahme von grauen Lambertz-Strahlern lässt sich jedoch auch für die Strahlung ein näherungsweiser Wärmeübergangskoeffizient angeben. Nach [34] gilt

$$\alpha_{rad} = C_{12} \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{T_1 - T_2}, \quad (2.73)$$

wobei  $C_{12}$  die so genannte Strahlungsaustauschzahl darstellt. Die Strahlungsaustauschzahl berücksichtigt sowohl das Emissionsvermögen der beiden Strahler als auch die geometrisch Anordnung der strahlenden Körper. Für zwei umschlossene Körper gilt nach [142]

$$C_{12} = \frac{C_s}{\frac{1}{\epsilon_{s1}} - 1 + \frac{1}{\varphi_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left( \frac{1}{\epsilon_{s2}} - 1 \right)}. \quad (2.74)$$

Der Sichtfaktor  $\varphi_{12}$  gibt an, welcher Teil der vom Körper 1 ausgehenden Strahlung auf den Körper 2 auftrifft. Ist der innere Körper überall konvex, trifft die gesamte vom Körper 1 ausgehende Strahlung auf den Körper 2 auf. In diesem Fall ist der Sichtfaktor  $\varphi_{12}$  gleich eins. Dies ist bei Piezostapelaktoren typischerweise der Fall. Geht man darüber hinaus davon aus, dass der umschließende Körper wesentlich größer als der eingeschlossene Körper ist, vereinfacht sich Gleichung (2.74) zu

$$C_{12} = C_s \epsilon_{s1}. \quad (2.75)$$

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{rad}$  ist somit nichtlinear von der Differenztemperatur abhängig. Ist der Temperaturgradient innerhalb des Aktors von Interesse, muss die Fouriersche Wärmeleitgleichung gelöst werden. Aufgrund der zylindrischen Form der untersuchten Aktoren bietet sich eine Darstellung in Zylinderkoordinaten an

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (2.76)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\rho$  ist die Dichte und  $c$  die Wärmekapazität des Aktormaterials.  $\dot{q}$  beschreibt die pro Volumen zugeführte Wärmemenge und  $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$  die Geschwindigkeit der Temperaturänderung. Die Definition der Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  können Abbildung 2.14 entnommen werden.

Zum eindeutigen Lösen von Gleichung (2.76) für eine bestimmte Geometrie werden geeignete Randbedingungen benötigt, welche sich aus den oben beschriebenen Wärmeabfuhrmechanismen an der Aktoroberfläche ergeben. Es gibt Dirichlet, Neumann und Cauchy Randbedingungen. Bei einer Dirichlet Randbedingung wird die Temperatur auf dem Rand des Lösungsgebietes direkt vorgegeben. Dies ist unter Umständen dann sinnvoll, wenn die Temperaturverteilung auf dem Rand messtechnisch erfasst wurde. Eine Neumann Randbedingung ermöglicht die Vorgabe der Ableitung der Temperatur auf dem Rand. So kann ein Wärmestrom über den Rand des Lösungsgebietes direkt

vorgegeben werden. Bei einer Cauchy Randbedingung handelt es sich um Linearkombination der Temperatur an der Oberfläche und deren Ableitung. Somit lässt sich durch eine Cauchy Randbedingung der konvektive Wärmeübergang abbilden.

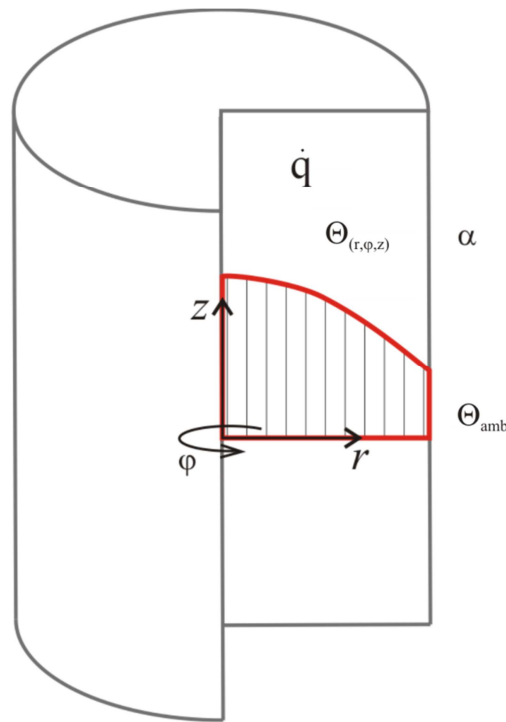


Abbildung 2.14 Schematische Schnittdarstellung eines Stapelaktors.

Zum numerischen Lösen der Fourierschen Wärmeleitgleichung wird die Software Ansys sowie die „Partial-Differential-Equation“ Toolbox (PDE-Toolbox) von Matlab eingesetzt. Beide Berechnungswerkzeuge basieren auf der Finiten Elemente Methode, welche in Abschnitt 2.12 kurz erläutert wird.

In der Literatur finden sich bisher überwiegend Punktmassenmodelle zur Modellierung des thermischen Aktorverhaltens. Ein Beispiel für ein Punktmassenmodell findet sich z. B. bei Zheng et al. [21]. Dieser untersucht die Eigenerwärmung von Aktoren mit geringen Abmessungen, so dass die Idealisierung als Punktmasse gerechtfertigt ist. Das größte Exemplar hat eine Grundfläche von 5 mm x 5 mm bei einer Länge von 20 mm. Während der Experimente werden die Aktoren auf Papierstelzen aufgestellt, so dass eine Wärmeabfuhr über Wärmeleitung eine vernachlässigbare Rolle spielt. Folgerichtig wird bei der Modellierung der Wärmeabfuhr nur Konvektion und Strahlung berücksichtigt. Ebenfalls als Punktmasse modelliert Senousy einen Stapelaktor, welcher in einem Diesel-Einspritzsystem eingesetzt werden soll [17]. Dieser ist mit einem Kühlkörper, welcher im direkten Kontakt mit dem Aktor steht, bestückt. Deshalb wird neben der Konvektion an der nicht vom Kühlkörper bedeckten Fläche auch die Wärmeleitung durch den Kühlkörper berücksichtigt. Auch Pritchard [146] verwendet ein Punktmassenmodell zur Modellierung eines piezoelektrischen Aktors. Mit einer Parameteranpassung ermittelt er relativ hohe Wärmeübergangskoeffizienten von 140 W/m<sup>2</sup>K bis 210 W/m<sup>2</sup>K, was darauf zurückzuführen ist,

---

dass ein Großteil der Wärme durch Wärmeleitung über die Aufstandsfläche des Aktuators in die Messaufnahme geleitet wird. Ein weiteres Punktmassenmodell für einen in einem Faserkunststoffverbund eingebetteten Aktor findet sich in [147].

Sherrit verwendet eine eindimensionale, stationäre Lösung der Fourierschen Wärmeleitgleichung zur Berechnung der Aktortemperatur eines 2 mm dicken Aktorplättchens, welches bei hoher Leistung nahe seiner mechanischen Resonanz betrieben wird [148]. So kann er den Temperaturgradient innerhalb des Aktuators in Dickenrichtung berechnen. Als Randbedingung gibt er eine Oberflächentemperatur vor. Er stellt fest, dass sich trotz der geringen Dicke von nur 2 mm eine Temperaturüberhöhung von 35 °C innerhalb des Aktors einstellt, was belegt, dass ein Punktmassenmodell in der Regel nicht ausreicht, um die maximale Aktortemperatur zu berechnen. Es ist davon auszugehen, dass auch bei den in dieser Arbeit untersuchten Stapelaktoren signifikante Temperaturgradienten auftreten. Deshalb wird ein Modell auf Basis der Fourierschen Wärmeleitgleichung angestrebt.

---

## 2.12 Die Methode der Finiten Elemente

---

Für die Fouriersche Wärmeleitgleichung gibt es üblicherweise keine analytische Lösung, so dass eine numerische Lösung unvermeidbar ist. Wie bereits erwähnt, werden in dieser Arbeit zur Lösung von Gleichung (2.76) die Software Ansys sowie die Partial Differential Equation Toolbox von Matlab eingesetzt, welche beide auf der Finiten Elemente Methode (FEM) basieren. Ansys wird während der Parameteridentifikation des thermischen Modellteils eingesetzt. Die PDE-Toolbox kommt bei der Simulation des Aktorgesamtmodells in Matlab und Simulink zum Einsatz.

Hier wird nun kurz die Grundidee der Finiten Elemente Methode vorgestellt, welches ein universell einsetzbares Verfahren zum Lösen partieller Differentialgleichungen auf komplexen Geometrien darstellt. Eine ausführlichere Einführung findet sich zum Beispiel in [149].

Bei der Methode der Finiten Elemente wird das Lösungsgebiet  $G$ , auf welchem die partielle Differentialgleichung gelöst werden soll, in  $m$  Teilgebieten  $G_e$  unterteilt. Diese Teilgebiete werden aufgrund Ihrer endlichen Größe als Finites Element bezeichnet,

$$G = \sum_{e=1}^m G_e. \quad (2.77)$$

Innerhalb eines jeden Elements werden nun  $n$  Ansatzfunktionen  $\Psi_{e,i}$  definiert, welche nur auf dem Gebiet des Elements ungleich null sind. Die Linearkombination dieser Ansatzfunktionen  $y|_{G_e}$  entspricht der Menge der möglichen diskreten Lösungen auf Elementebene, wobei die Koeffizienten  $c_{e,i}$  zunächst unbekannt sind

$$y|_{G_e} \approx \sum_{e=1}^n c_{e,i} \Psi_{e,i}. \quad (2.78)$$

Diese Ansätze werden nun in die zu lösende Differentialgleichung eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung so umgeformt, dass auf der einen Seite alle Terme der DGL und auf der anderen Seite

der Lösungsfehler  $R$  steht. Der Lösungsfehler ist für beliebige  $c_{e,i}$  sicherlich ungleich von null und wird als Residuum bezeichnet. Nun wird diese Gleichung mit einer Testfunktion  $\gamma_{e,j}$  multipliziert und anschließend unter Anwendung der Integralsätze einmalig über das gesamte Lösungsgebiet integriert. Anschließend wird gefordert, dass die gewichteten Residuen im integralen Mittel über das Lösungsgebiet verschwinden. Dies wird als Methode der gewichteten Residuen bezeichnet. Es ergibt sich die so genannte „schwache Form“ der Differentialgleichung. Die Bezeichnung „schwache Form“ leitet sich von den Differenzierbarkeitsanforderungen ab, denn die „schwache Form“ enthält nur noch Ableitungen erster Ordnung. Voraussetzung für eine sinnvolle numerische Lösung ist, dass die Ansatzfunktionen mindestens genauso oft differenzierbar sind wie die höchste Ableitung der zu lösenden Differentialgleichung. Somit ermöglicht die Verwendung der „schwachen Form“ der Differentialgleichung lineare Ansatzfunktionen.

Die schwache Form der Differentialgleichung lässt sich häufig auch über eine Variationsrechnung herleiten. Voraussetzung für diese abweichende Vorgehensweise ist jedoch, dass die Lösung der zu lösenden Differentialgleichung eine natürliche Extremalbedingung erfüllt. Bei strukturmechanischen Problemen wird beispielsweise die potentielle mechanische Energie im Falle der korrekten Lösung minimal. Bei der hier zu behandelnden instationären Wärmeleitgleichung liegt jedoch kein solches Potential vor, so dass nur der oben beschriebene Weg möglich ist. Im nächsten Schritt wird für die Testfunktionen  $\gamma_{e,j}$  der gleiche Ansatz wie für die Ansatzfunktionen  $\Psi_{e,i}$  der gesuchten Lösung der DGL eingesetzt. Diese Vorgehensweise wird als Verfahren von Galerkin bezeichnet. Die oben erwähnte Integration über das gesamte Lösungsgebiet wird jetzt durch die Summe der Integrale über die einzelnen Elemente ersetzt. Dies ist ohne Weiteres möglich, da die Ansatzfunktionen  $\Psi_{e,i}$  nur auf der Fläche des jeweiligen Elements ungleich von Null sind. Die Integration auf Elementebene erfolgt meist mit numerischen Methoden, wie z. B. der Gauß-Quadratur. Bei elliptischen Differentialgleichungen wie z. B. der stationären Wärmeleitgleichung erhält man so ein lineares Gleichungssystem

$$K_{ij}c_j = f_i, \quad (2.79)$$

welches zunächst nicht eindeutig lösbar ist, da die Matrix  $K_{ij}$  singulär ist. Erst nach dem nun folgenden Einbau der Randbedingungen in das Gleichungssystem erhält man eine eindeutige Lösung. In Anlehnung an strukturmechanische Probleme wird die Matrix  $K_{ij}$  typischerweise als Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite des Gleichungssystems  $f_i$  als Lastvektor bezeichnet. Bei der in dieser Arbeit zu lösenden instationären Wärmeleitgleichung handelt es sich jedoch um eine parabolische Differentialgleichung. Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente führt bei dieser nicht auf ein lineares Gleichungssystem sondern auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$M_{ij}\dot{c}_j + K_{ij}c_j = f_i, \quad (2.80)$$

---

welches sich mit üblichen Zeitschrittverfahren lösen lässt. Bei der Wärmeleitgleichung entsprechen die Koeffizienten  $c_i$  den Temperaturen  $\Theta_i$  an den Ecken der einzelnen Elementen, den so genannten Knoten.

---

## 2.13 Optimierungsalgorithmen

---

Zur Ermittlung der Parameter der Fourierschen Wärmeleitgleichung wird im weiteren Verlauf ein Optimierungsverfahren eingesetzt. Das Ziel eines Optimierungsverfahrens ist es die Parameter eines komplexen Systems zu finden, für welche das System optimal wird. Optimal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine zuvor definierte Zielfunktion einen minimalen oder maximalen Wert annimmt. Deshalb lässt sich die Suche nach Parametern eines Modells, welche zu einer möglichst guten Übereinstimmung von Modell und Messung führen, als Optimierungsproblem auffassen. Die Zielfunktion ist so zu wählen, dass es ein Maß für die Güte der Übereinstimmung von Messung und Experiment darstellt. Bei der Suche der optimalen Parameter des thermischen Modellteils lässt sich die Güte des gefundenen Parametersatzes anhand der Abweichung der gemessenen und der simulierten Temperaturen ermitteln. Somit muss für eine Auswertung der Zielfunktion jeweils eine FEM Simulation in Ansys durchgeführt werden.

Lässt sich die Ableitung der Zielfunktion einfach ermitteln, so bieten sich so genannte Gradientenverfahren zur Lösung des Optimierungsproblems an. Diese bewegen sich anhand der Richtungsableitung der Zielfunktion durch das Problemgebiet und weisen eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit auf. Im hier betrachteten Fall lässt sich der Gradient der Zielfunktion jedoch nicht einfach ermitteln, da die Zielfunktion nicht analytisch zur Verfügung steht. Somit bleibt nur die Möglichkeit der numerischen Ermittlung. Hierzu sind jedoch zusätzliche Funktionsauswertungen, bzw. Simulationen in Ansys notwendig, was die Berechnungsdauer erhöht. Deshalb wird in dieser Arbeit ein gradientenfreies Optimierungsverfahren gewählt. Diese Verfahren weisen in der Regel eine langsamere Konvergenzgeschwindigkeit auf. Der zusätzliche Berechnungsaufwand für die numerische Berechnung des Gradienten der Zielfunktion entfällt jedoch, so dass sich in Summe betrachtet ein numerisch effizientes Verfahren ergibt. Ein weiteres Problem stellt die Topologie der Zielfunktion dar. Weist diese viele lokale Minima auf oder steht kein geeigneter Startwert für die Optimierung zur Verfügung, muss ein globaler Optimierungsansatz gewählt werden. Im hier behandelten Fall lassen sich jedoch analytisch gute Startwerte abschätzen. Somit ist die Gefahr gering, dass der Optimierungsalgorithmus in ein lokales Minimum läuft und so das globale Minimum nicht findet. Deshalb kann ein lokales Optimierungsverfahren verwendet werden.

Die Wahl des Optimierungsverfahrens fällt auf den Downhill-Simplex Algorithmus, welcher häufig auch als Nelder-Mead-Algorithmus bezeichnet wird [150]. Dieser weist ein lineares Konvergenzverhalten auf und benötigt keine Ableitungen der Zielfunktion. Er ist bereits in Matlab implementiert und weist ein robustes Konvergenzverhalten auf.

Wie der Name des Algorithmus vermuten lässt, basiert das Verfahren auf einem Simplex. Ein Simplex ist jeweils das einfachste Volumen, was im N-dimensionalen Parameterraum der

---

Zielfunktion aus  $N+1$  Punkten aufgespannt werden kann. Im zweidimensionalen Fall entspricht der Simplex somit einem Dreieck, im dreidimensionalen Fall einem Tetraeder. Jeder Eckpunkt des Simplexes entspricht einem Parametersatz der Zielfunktion. Zu Beginn eines Iterationsschrittes wird für jeden der  $N+1$  Parametersätze die Zielfunktion ausgewertet. Unter diesen wird dann der mit dem schlechtesten und dem besten Zielfunktionswert ermittelt. Der schlechteste Parametersatz des Simplex wird im nächsten Iterationsschritt durch einen neuen ersetzt. Dabei stehen dem Simplex Algorithmus mehrere Optionen zur Findung des neuen Parametersatzes zur Verfügung. Die Grundoperation ist die Reflektion. Hierbei wird der schlechteste Punkt am Mittelpunkt des restlichen Simplex gespiegelt. Somit verschiebt sich der Simplex hin zu besseren Zielfunktionswerten. Führt eine Reflektion zur Verbesserung des Zielfunktionswertes, wird im nächsten Schritt ein um einen wählbaren Faktor größerer Schritt in die Spiegelungsrichtung getätigt. Dieser Fall wird Expansion genannt. Führt die anfängliche Reflektion nicht zu einer Verbesserung des Zielfunktionswertes, zieht sich der Simplex zusammen. Dieser Vorgang wird als Kontraktion bezeichnet. Dabei verschiebt sich der schlechteste Parametersatz hin zum Mittelpunkt des Simplex. Führt die Kontraktion zu einer Verbesserung des Funktionswertes, beginnt der Algorithmus von neuem mit einer Reflektion des schlechtesten Punktes am Mittelpunkt des Simplex. Ist eine Kontraktion nicht erfolgreich, zieht sich der Simplex insgesamt zusammen. Dieser Vorgang wird als Kompression bezeichnet. Dabei verschieben sich alle Punkte des Simplex hin zum Parametersatz mit dem besten Funktionswert. Diese Schritte werden so lange wiederholt bis ein Abbruchkriterium erfüllt bzw. der gesuchte Parametersatz mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt wurde.





---

## 3 Prüfstandsumgebung und Messmethoden

---

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über den zur Gewinnung der Modellparameter verwendeten Prüfstand, die verwendete Messtechnik sowie die angewendeten Messmethoden. Eine detaillierte Darstellung des Prüfstandes wird in [22] gegeben.

---

### 3.1 Prüfstandsaufbau

---

Zur Durchführung der Messungen wurde der in Abbildung 3.1 dargestellte Prüfstand verwendet. Der Prüfstand ist mit einer Temperaturkammer ausgestattet, welche es ermöglicht die Prüflinge auf eine definierte Temperatur zu erwärmen. Über eine mechanische Vorspanneinrichtung können statische Vorlasten aufgebracht werden. Darüber hinaus verfügt der Prüfstand über einen regelbaren Lastaktor. So lässt sich der Prüfling einer definierten mechanischen Spannung aussetzen. Weiterhin besteht die Möglichkeit durch den Lastaktor eine definierte Umgebungssteifigkeit einzustellen. Weitere Details hierzu finden sich in Abschnitt 3.1.1.

Messtechnisch erfasst werden die am Prüfling anliegende Spannung sowie die elektrische Stromstärke. Darüber hinaus wird mit Hilfe einer Sawyer-Tower Schaltung die auf dem Aktor befindliche Ladung indirekt gemessen [151].

Zur Erfassung der Aktorkraft kommt der sich oberhalb des Lastaktors befindende piezoelektrische Kraftaufnehmer zum Einsatz. Aufgrund der mechanischen Reihenschaltung von Lastaktor und Prüfling wirkt statisch betrachtet stets die gleiche Kraft auf beide Aktoren. Im dynamischen Betrieb ist die Kraftgleichheit auf beide Aktoren nur dann sicher gestellt, wenn sich die Betriebsfrequenz deutlich unterhalb der ersten Eigenfrequenz des Prüfstands befindet. Deshalb lassen sich mit dem Prüfstand nur Messungen bis ca. 100 Hz zuverlässig durchführen.

Die Längenänderung des Prüflings wird einseitig mit einem Positionssensor gemessen. Zur Berechnung der Dehnung des Prüflings wird davon ausgegangen, dass sich der Aufstandspunkt des Prüflings während der Versuchsdurchführung nicht verschiebt. Diese Annahme ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn die endliche Steifigkeit des Sockels, auf welchem sich der Prüfling befindet, vernachlässigt werden kann. Bei der Messung der Blockierkraft sowie bei der Bestimmung der Steifigkeit des Prüflings kann die endliche Steifigkeit des Sockels jedoch nicht vernachlässigt werden [152]. Um mit dem bestehenden Prüfstandsaufbau dennoch die Steifigkeit des Prüflings bestimmen zu können, wurde mittels einer Finiten Elemente Simulation des Prüfstandes eine Korrekturfunktion abgeleitet, welche es ermöglicht aus der gemessenen Steifigkeit auf die reale Steifigkeit des Prüflings zu schließen. Weitere Details zur Korrekturfunktion und zur durchgeführten Simulation finden sich im Anhang A.1.

Ein weiteres Problem stellen die vielen Fügestellen im Prüfstandsaufbau dar. Die einzelnen Bauteile (Sockel, Prüfling, Stößel, Lastaktor, Kraftsensor etc.) werden lediglich aufeinander gestapelt. Die Ausrichtung der einzelnen Bauteile wird durch Zentrierstifte sichergestellt. Zwischen den Bauteilen gibt es eine Vielzahl von Fugen. In diesen kommt es insbesondere bei niedrigen Vorspannungen zu

Setzphänomenen. Diese können zum Beispiel Steifigkeitsmessungen erheblich verfälschen. Ebenfalls kritisch sind nicht exakt parallele Stirnflächen der Bauteile. Diese verfälschen die Messwerte bei Steifigkeitsmessungen zusätzlich. Konsequenz hieraus ist eine eingeschränkte Reproduzierbarkeit sowie Messfehler bei Steifigkeitsmessungen.

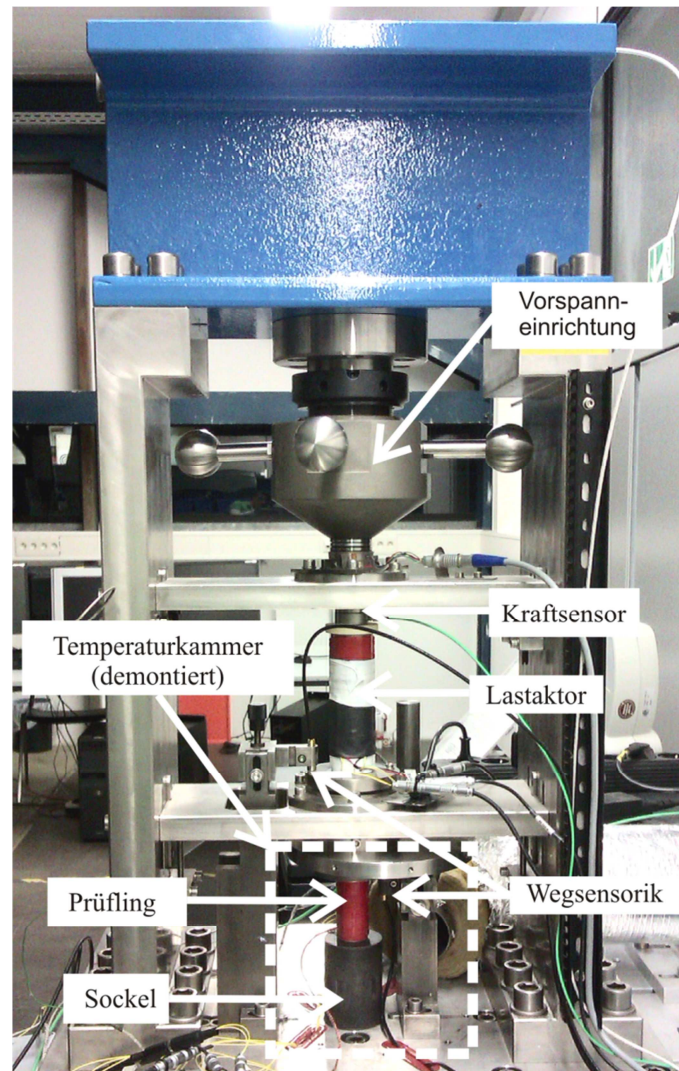


Abbildung 3.1 Prüfstand zur experimentellen Untersuchung von Piezostapelaktoren bei erhöhten Umgebungstemperaturen (Temperaturkammer ist in der Abbildung demontiert).

### 3.1.1 Betriebsmodi des Prüfstandes

Der verwendete Prüfstand verfügt über verschiedene Betriebsmodi, welche sich in der Ansteuerung des Lastaktors unterscheiden. Dieser kann sowohl kraft- als auch positions- und spannungsgeregelt betrieben werden, wobei in dieser Arbeit ausschließlich kraftgeregelt Modi verwendet wurden. Als Regler kommt bei der Kraftregelung stets ein konventioneller PID Regler zum Einsatz. Im Modus „konstante Last“ wird mit Hilfe des Lastaktors eine konstante mechanische Vorspannung auf den Prüfling sichergestellt. Zur Ermittlung des Kraftistwertes wird der piezoelektrische

---

Kraftaufnehmer verwendet. Durch die Kraftregelung bleibt die eingestellte Vorspannung auch dann vorhanden, wenn ein elektrisches Feld an den Prüfling angelegt wird. Der Lastaktor verfügt über den doppelten Stellweg der Prüflinge, so dass eine konstante Vorspannung auch bei Ansteuerung des Prüflings mit der maximal zulässigen elektrischen Feldstärke sichergestellt werden kann. Die Dehnung des Prüflings kann aus regelungstechnischer Sicht als Störung des Kraftregelkreises aufgefasst werden. Da die Störung in Form des an den Prüfling angelegten elektrischen Feldes bekannt ist, wurde eine Störgrößenaufschaltung für den Kraftregelkreis realisiert, welche die Güte der Kraftregelung erheblich verbessert.

Im Modus „variable Last“ kann ein beliebiges Kraftsignal vorgegeben werden. So lassen sich definierte Kräfte auf den Prüfling aufprägen. Dieser Betriebsmodus wird bei der Durchführung der in Abschnitt 3.5.2 erläuterten Berlincourt Messungen verwendet.

Im Modus „definierte Steifigkeit“ wird der Lastaktor ebenfalls kraftgeregelt betrieben. Jedoch wird der Sollwert der Kraftregelung wie folgt berechnet

$$F_{soll} = F_0 + k_{soll}\Delta l. \quad (3.1)$$

Hierin entspricht  $F_0$  der gewünschten Vorspannkraft,  $\Delta l$  der gemessenen Längenänderung des Prüflings und  $k_{soll}$  der gewünschten Umgebungssteifigkeit. Durch diese Vorgehensweise simuliert der Lastaktor eine ideale Feder mit frei wählbarer Steifigkeit, welche softwareseitig eingestellt werden kann. So lassen sich unterschiedliche reale Einbausituationen mit dem Prüfstand virtuell abbilden.

---

## 3.2 Aufbau der untersuchten Prüflinge

---

Die Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich, wie bereits erwähnt, auf so genannte Hochvoltaktoren. Diese werden mit Spannungen von 1000 V betrieben, was bei einer Keramiksichtdicke von 0,5 mm einer elektrischen Feldstärke von 2 kV/mm entspricht. Die verwendeten Prüflinge haben einen Durchmesser von 25 mm und eine Länge von 60 mm. Ein Prüfling ist exemplarisch in Abbildung 3.2 a) dargestellt. Zur Erfassung der Aktortemperatur sind die Prüflinge mit Temperatursensoren versehen. Eine schematische Darstellung der Positionen der Temperatursensoren kann Abbildung 3.2 b) entnommen werden. Auf der Aktoroberfläche befinden sich drei PT1000 Widerstandsthermometer der Genauigkeitsklasse A. Die maximale Messabweichung dieser Sensoren  $\Delta\theta$  liegt nach [153] bei

$$\Delta\theta = \pm(0,15 + 0,002 \cdot \theta_{mess}), \quad (3.2)$$

wobei  $\theta_{mess}$  dem Messwert in °C entspricht. Der Messfehler dieser Sensoren liegt folglich zwischen  $\pm 0,19^\circ \text{C}$  bei einer Aktortemperatur von  $20^\circ \text{C}$  und  $\pm 0,45^\circ \text{C}$  bei einer Temperatur von  $150^\circ \text{C}$ . Zusätzlich befinden sich im Zentrum der Aktoren drei inaktive Schichten. Die mittlere der drei Schichten wurde vor der Montage in radialer Richtung durchtrennt, so dass sich nach der Verklebung der Einzelschichten eine radiale, quadratische Bohrung von 0,5 mm mal 0,5 mm ergibt. In diese Bohrung werden, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, zwei Typ K Thermoelemente der

Messgenauigkeitsklasse 1 eingesteckt. Thermoelemente des Typs K der Klasse 1 [153] weisen im relevanten Messbereich eine maximale Messabweichung von  $\pm 1,5\text{ °C}$  auf. Durch die gewählten Sensorpositionen lassen sich sowohl der radiale als auch der axiale Temperaturgradient messtechnisch erfassen.

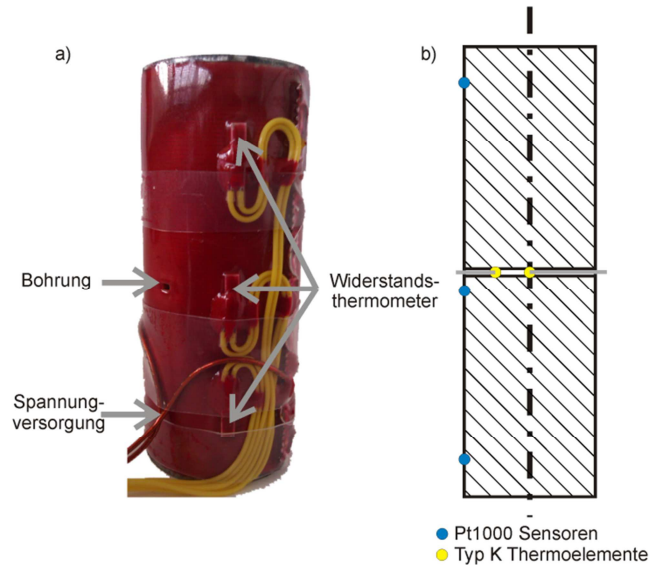


Abbildung 3.2 a) Foto eines Prüflings b) schematische Schnittdarstellung eines Prüflings.

Die Messabweichungen der Sensoren sind im Auslieferungszustand relativ groß. So kann im schlimmsten Fall die mit den Thermoelementen gemessene Temperatur um bis zu  $1,95\text{ °C}$  von den mit den PT1000 gemessenen Temperaturen abweichen, obwohl physikalisch kein Temperaturunterschied vorliegt. Deshalb wurden die Sensoren nachkalibriert. Durch die Kalibrierung wurde eine maximale Abweichung von  $\pm 0,15\text{ °C}$  zur Referenztemperatur erreicht. Weitere Details zur Temperatursensorkalibrierung finden sich in Anhang A.2.

### 3.3 Erfassung des axialen Wärmestromes

Über die axialen Aufstandsflächen wird über Wärmeleitung Energie aus dem Aktor abgeführt. Um diesen Energiebetrag messtechnisch zu erfassen, wurden Wärmestromsensoren der Firma Wuntronic vom Typ FR-025 verwendet. Dabei handelt es sich um 2,3 mm dicke Kunststoffscheiben, welche wie die Prüflinge einen Durchmesser von 25 mm aufweisen. Aufgrund der geringen Wärmeleitfähigkeit des verwendeten Kunststoffmaterials entsteht im Sensor ein Temperaturgradient, welcher mit Hilfe von mehreren eingegossenen Thermoelementen erfasst wird [154]. Die Thermoelemente sind so verschaltet, dass die entstehende Thermospannung direkt proportional zum Wärmestrom durch den Sensor ist. Die Sensoren ertragen hohe Drücke, so dass sie zwischen Aktor und Prüfstand direkt im Kraftfluss eingebaut werden können. Durch die Verwendung von zwei Sensoren wird so der axiale Wärmeaustrag aus dem Aktor über die

---

Stirnflächen erfasst. Darüber hinaus verfügen die Wärmestromsensoren über ein zusätzliches NTC-Wärmewiderstandsthermometer. So wird zusätzlich die Temperatur im Sensor gemessen.

---

### 3.4 Messabweichungen

---

Die Messung einer physikalischen Größe ist niemals exakt. Zwischen dem vom Messgerät angezeigten Wert  $y_A$  und dem wahren Wert  $x_m$  besteht immer eine gewisse Abweichung  $\Delta x$ , welche in der Ingenieurspraxis als klein gegenüber dem wahren Wert  $x_m$  angenommen wird.

$$y_A = x_m + \Delta x_m \quad (3.3)$$

Die Abweichung  $\Delta x_m$  wird im Allgemeinen in die systematische Abweichung  $\Delta x_s$  und die zufällige Abweichung  $\Delta x_z$  aufgespalten

$$\Delta x_m = \Delta x_s + \Delta x_z. \quad (3.4)$$

Zufällige Abweichungen sind nicht reproduzierbar. Sie führen zu einer Streuung der Messwerte, welche mit statistischen Methoden untersucht werden kann.

Auf die Behandlung der zufälligen Fehler wird in dieser Arbeit jedoch verzichtet, da davon ausgegangen wird, dass dieser Fehler stets vernachlässigbar klein im Vergleich zu den systematischen Abweichungen ist. Die systematischen Abweichungen entsprechen der Menge aller reproduzierbaren Abweichungen. Dies bedeutet, dass unter gleichen Messbedingungen immer die gleiche Abweichung mit gleichem Betrag und gleichem Vorzeichen vom wahren Wert auftritt. Die systematischen Messfehler werden in Kapitel 3.4.1 genauer behandelt. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zufällige Abweichungen das Messergebnis unsicher, systematische Abweichungen das Messergebnis unrichtig machen.

---

#### 3.4.1 Systematische Messfehler

---

Ist der angezeigte Wert  $y_A$  eine Funktion von mehreren Messwerten  $x_{m,i}$ , kann unabhängig vom Abweichungstyp die Fortpflanzung der einzelnen Messabweichungen  $\Delta x_{m,i}$  durch das so genannte lineare Fortpflanzungsgesetz berechnet werden. Dieses beruht auf einer Taylorreihenentwicklung der Bestimmungsgleichung des Anzeigewertes unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung. Die Abweichung des Anzeigewertes  $\Delta y_A$  vom wahren Wert ist gegeben durch

$$\Delta y_A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_A}{\partial x_{m,i}} \Delta x_{m,i}, \quad (3.5)$$

wobei eine Schätzung der systematischen Abweichungen  $\Delta x_{m,i}$  zur Berechnung bekannt sein muss. Die partielle Ableitung  $\partial y_A / \partial x_{m,i}$  entspricht der Änderung des Anzeigewertes bei Änderung eines Sensorwertes.  $n$  steht für die Anzahl der Messgrößen. Damit Gleichung (3.5) angewendet werden kann müssen die Messabweichungen unabhängig voneinander sein. Gibt es eine Korrelation zwischen den Messabweichungen, führt dies zu zusätzlichen Messfehlern.



---

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass durch das Berechnen der maximal möglichen Abweichung  $\Delta y_A$  die Qualität einer Messung überprüft werden kann.

---

### 3.5 Bestimmung linearer Kleinsignalkennwerte

---

Zur Beschreibung des Aktorverhaltens mit Hilfe der in Kapitel 2.2 hergeleiteten linearen Modellgleichungen, werden lineare Modellparameter benötigt. Diese lassen sich mit den im folgenden Abschnitt erläuterten Methoden bestimmen.

---

#### 3.5.1 Resonante Messmethode

---

Die Standardmethode zur Bestimmung der linearen Kleinsignalparameter ist die resonante Messmethode. Bei dieser werden die piezoelektrischen Kleinsignalparameter aus Messungen der Impedanzkurve, d. h. der Kurve des komplexen, frequenzabhängigen Widerstandes von Keramikproben ermittelt. Die Impedanzkurven der Keramikproben weisen stets einen charakteristischen Verlauf mit einer Antiresonanzstelle  $f_A$  und einer Resonanzstelle  $f_R$  auf. Die Vorgehensweise zur Bestimmung eines vollständigen Materialparametersatzes ist DIN EN 50324 [155] zu entnehmen. Hierzu ist jedoch eine Vielzahl von unterschiedlichen Probengeometrien notwendig. Zur Bestimmung der piezoelektrischen Ladungskonstante in Polarisationsrichtung  $d_{33}$  werden dünne, in Dickenrichtung polarisierte, Keramikscheiben verwendet. Dabei muss die Scheibendicke sehr viel kleiner als der Durchmesser der Probe sein. Stapelaktoren bestehen aus einer Vielzahl solcher Keramikscheiben. Diese sind mechanisch in Reihe und elektrisch parallel geschaltet. Eine direkte Übertragung der Bestimmungsformel für  $d_{33}$  einer Einzelscheibe auf einen Stapelaktor ist nicht zulässig, so dass die DIN-Norm nicht auf Stapelaktoren anwendbar ist. Martin [156] liefert jedoch einen für Stapelaktoren gültigen Ansatz. Er betrachtet zunächst allgemein den Fall gestapelter Piezoscheiben beliebiger Dicke und leitet von diesem allgemeinen Fall vereinfachte Spezialfälle ab. Hierbei greift er auf Methoden der Netztheorie zurück. Basierend auf diesen Überlegungen gibt Martin in [157] eine konkrete Anleitung zum Bestimmen des Koppelfaktors  $k_{33}$ , der Nachgiebigkeit  $s_{33}^E$  und der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}^T$ . Unter Vernachlässigung der Aktorverluste sowie von lateralen Effekten und unter der Voraussetzung, dass alle Keramikscheiben identisch sind gilt für den Koppelfaktor  $k_{33}$

$$\frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2} = \frac{\pi f_A}{2f_R} \tan\left(\frac{\pi(f_A - f_R)}{2f_R}\right), \quad (3.6)$$

wobei  $f_A$  der Antiresonanzfrequenz und  $f_R$  der Resonanzfrequenz der Impedanzkurve entspricht. Die piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^D$  lässt sich berechnen aus

$$s_{33}^D = \frac{1}{\rho C_L^2}, \quad (3.7)$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$C_L = \frac{2 n l_s f_R}{\sqrt{1 - k_{33}^2}}. \quad (3.8)$$

Für  $s_{33}^E$  folgt unter Verwendung des allgemeinen Zusammenhangs  $s_{33}^D = s_{33}^E(1 - k_{33}^2)$  nach [27]

$$s_{33}^E = \frac{1}{4\rho n^2 l_s^2 f_R^2}. \quad (3.9)$$

Die Permittivität des Aktormaterials ergibt sich mit

$$\epsilon_{33}^T = \frac{l_s C_T}{n A_e} \quad (3.10)$$

aus der mechanisch spannungsfrei ermittelten elektrischen Aktorkapazität  $C_T$ . Von mechanischer Spannungsfreiheit darf dann ausgegangen werden, wenn die Kapazität bei niedrigen Messfrequenzen ermittelt wurde. Die Messfrequenz sollte möglichst zwei bis drei Größenordnungen kleiner sein als die Frequenz der ersten Aktorresonanzfrequenz. Für die piezoelektrische Spannungskonstante  $g_{33}$  gibt Martin

$$g_{33} = \sqrt{\left(\frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2}\right) \left(\frac{s_{33}^D}{\epsilon_{33}^T}\right)} \quad (3.11)$$

an. Aus den Gleichungen (3.10) und (3.11) berechnet sich dann die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  zu

$$d_{33} = g_{33} \epsilon_{33}^T = \sqrt{\left(\frac{k_{33}^2}{1 - k_{33}^2}\right) s_{33}^D \epsilon_{33}^T} = \sqrt{k_{33}^2 s_{33}^E \epsilon_{33}^T}. \quad (3.12)$$

Als alternative Methode zur Bestimmung des Koppelfaktors schlägt Martin eine Auswertung der Aktorkapazität vor. Für diese Messung muss neben der mechanischen spannungsfreien Aktorkapazität  $C_T$  noch die longitudinal eingespannte Kapazität  $C_{LC}$  bestimmt werden. Aus diesen Messwerten folgt für den Koppelfaktor

$$k_{33}^2 = 1 - \frac{C_{LC}}{C_T}. \quad (3.13)$$

Da sich Piezostapelaktoren aufgrund der hohen erzeugten longitudinalen Kräfte praktisch nicht einspannen lassen, wird ein Trick verwendet. Die Aktorkapazität wird bei einer sehr hohen Messfrequenz ermittelt. Bei diesen hohen Frequenzen blockiert sich der Aktor aufgrund von Trägheitskräften selbst. Es muss jedoch darauf geachtet werden, dass keine höhere Eigenform des Aktors angeregt und somit die Messergebnisse verfälscht werden. Martin schlägt als geeignete Wahl das Anderthalbfache der ersten Aktoreigenfrequenz vor. Für die verwendeten Aktoren liegt diese Frequenz bei ca. 36 kHz. Auch neuere Veröffentlichungen, wie z. B. von Sherit [158], verwenden die von Martin aus der Netztheorie hergeleiteten Gleichungen.

Die aus Messungen an Stapelaktoren ermittelten Kleinsignalparameter haben jedoch eher

qualitativen Charakter und weichen teilweise deutlich von den mit Normproben ermittelten Werten ab [152]. Gründe für die Abweichung, der mit den Stapelaktoren ermittelten Kleinsignalparamete sind zum einen die Vernachlässigung der Klebeschicht, zum anderen eine eventuelle radiale Blockierung des Aktors durch Kleber und Elektrode sowie eine nicht exakte Bestimmung der effektiven Aktordichte.

---

### 3.5.2 Berlincourt Methode

---

Eine Alternative zur resonanten Methode ist die so genannte Berlincourt Methode welche nach Don A. Berlincourt benannt ist. Bei dieser Methode wird ein harmonisches Kraftsignal auf den zu untersuchenden Aktor aufgeprägt. Im Unterschied zur resonanten Methode kann der Aktor hierbei mechanisch vorgespannt werden, so dass eventuelle Einspannungseffekte mit berücksichtigt werden. Zur Durchführung der Berlincourt Messung wird der Aktor elektrisch kurzgeschlossen, so dass die Bedingung elektrisches Feld  $E = 0$  erfüllt ist. Unter der Annahme konstanter Entropie erhält man aus Gleichung (2.21)

$$d_{33}^E = \frac{D_3}{T_3} = \frac{E_{ch}}{nF}. \quad (3.14)$$

Eine zusätzliche Messung der Dehnung des untersuchten Aktors ermöglicht die Bestimmung der piezoelektrischen Nachgiebigkeit  $s_{33}^E$ . Mit Hilfe von Gleichung (2.22) findet sich

$$s_{33}^E = \frac{S_3}{T_3} = \frac{\Delta l A_c}{n l_s F}. \quad (3.15)$$

Die am Prüfstand nur einseitig durchgeführte Wegmessung lässt keine exakte Bestimmung der Längenänderung  $\Delta l$  zu. Deshalb werden die experimentell ermittelten Nachgiebigkeiten  $s_{33}^E$  zur besseren Vergleichbarkeit mit Referenzwerten nachträglich korrigiert. Die hierzu verwendete Vorgehensweise wird in Anhang A.1 erläutert.

---

## 3.6 Bestimmung linearer Großsignalparameter

---

Ergänzend zu den sonst üblichen Kleinsignalparametern werden in dieser Arbeit lineare Großsignalparameter ermittelt. In der Literatur findet sich eine Vielzahl von unterschiedlichen Definitionen linearer Großsignalparameter. Eine Übersicht über die gängigsten Definitionen wird in [152] gegeben. In dieser Arbeit wird jedoch eine neue Definition eingeführt.

Die experimentelle Ermittlung des piezoelektrischen Großsignalladungskonstanten  $d_{33,g}$  erfolgt aus dem Maximalhub des Aktors bei konstanter mechanischer Spannung  $T_3$  und einer elektrischen Feldstärkeänderung von  $\Delta E = 2 \text{ kV/mm}$ . Die Feldstärkeänderung wird sinusförmig gemäß der Formel

$$E_{(\tau)} = \frac{1}{2} (\Delta E \sin \left( 2\pi f \tau + \frac{3}{2}\pi \right) + \Delta E) \quad (3.16)$$



auf den Prüfling aufgebracht. Die Frequenz  $f$  des Testsignals wurde auf 20 Hz festgelegt. Die konstante mechanische Spannung wird durch den am Prüfstand vorhandenen kraftgeregelten Lastaktor realisiert. Die piezoelektrische Großsignalladungskonstante  $d_{33,g}$  wird aus der gemessenen Längenänderung  $\Delta l$  und der mit dem angelegten elektrischen Feld korrelierenden gemessenen elektrischen Spannungsänderung  $\Delta u$  bestimmt. Aus Gleichung (2.35) folgt für konstante Entropie  $\sigma$  und mechanische Spannung  $T_3$  für die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33,g}$

$$d_{33,g} = \frac{\Delta l}{n \Delta u}. \quad (3.17)$$

Aus der gleichen Messung ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (2.34)

$$\epsilon_{3,g} = \frac{\Delta E_{ch} l_s}{n A_e \Delta u}. \quad (3.18)$$

Die Großsignalnachgiebigkeit  $s_{33,g}$  wird unter Verwendung einer definierten mechanischen Steifigkeit des Prüfstandes ermittelt, welche durch den in Abschnitt 3.1.1 erläuterten Betriebsmodus „definierte Steifigkeit“ realisiert wurde. Der Aktor wird erneut mit dem in Gleichung (3.16) definierten elektrischen Feld beaufschlagt. Aus Gleichung (2.35) folgt unter Verwendung der soeben definierten Großsignalladungskonstanten  $d_{33,g}$  sowie der gemessenen Kraft-, Längen- und Spannungsänderungen  $\Delta F$ ,  $\Delta l$  und  $\Delta u$  für die Großsignalnachgiebigkeit

$$s_{33,g} = \frac{A_c}{n l_s \Delta F} (\Delta l - n d_{33,g} \Delta u). \quad (3.19)$$

Der Klammerterm in Gleichung (3.19) entspricht einer fiktiven Längenänderung, welche ausschließlich auf die äußere Kraftwirkung bzw. Umgebungssteifigkeit zurückzuführen ist, da von der Gesamtlängenänderung  $\Delta l$  die durch das elektrische Feld hervorgerufene Längenänderung  $n d_{33,g} \Delta u$  subtrahiert wird. Mit dieser fiktiven Längenänderung wird daraufhin die Nachgiebigkeit des Aktors berechnet. Durch diese Vorgehensweise wird die Nachgiebigkeit des Sockels, auf welchem sich der Prüfling befindet, implizit mitberücksichtigt, so dass sich bei Verwendung von  $s_{33,g}$  zur Berechnung der Aktordehnung mit Gleichung (2.35) Werte ergeben, welche mit der nur einseitig gemessenen Längenänderung übereinstimmen.

Alternativ lassen sich die Großsignalparameter  $d_{33,g}$  und  $s_{33,g}$  auch aus Herstellerangaben abschätzen. Aus dem Leerhub des Aktors  $\Delta l_{max}$  in Verbindung mit der als maximal spezifizierten Ansteuerspannung  $\Delta u_{max}$  ergibt sich mit Gleichung (3.17) die Großsignalladungskonstante  $d_{33,g}$  unter Normbedingungen. Durch Nullsetzen der Längenänderung  $\Delta l$  in Gleichung (3.19) bei gleichzeitigem Einsetzen der maximalen elektrischen Spannung  $u_{max}$  und der im Datenblatt angegebene Blockierkraft  $F_b$  des Aktors sowie der zuvor abgeschätzte piezoelektrische Großsignalladungskonstante  $d_{33,g}$  erhält man die Großsignalsteifigkeit  $s_{33,g}$ . Einzig die Großsignalpermittivität  $\epsilon_{3,g}$  lässt sich nicht aus den typischen Herstellerangaben abschätzen [159].

---

## 3.7 Bestimmung thermischer Modellparameter

---

Um die Parameter für den thermischen Modellteil zu ermitteln, wird der Aktor mit Hilfe seiner inneren Verluste gezielt erwärmt. Um definierte Verluste zu erzeugen, wird die in Abschnitt 3.7.1 erläuterte Verlustleistungsregelung verwendet. Während der Messungen werden die gemessenen Temperaturen aufgezeichnet. Die Aktorverlustleistung wird stufenweise erhöht. Es werden die Verluststufen 3 W, 6 W, 9 W, 12 W und 15 W angefahren. Bei einer Verlustleistung von 15 W ergibt sich im Kern des Aktors eine Temperatur von etwa 150 °C. Nach einer Änderung der Verlustleistung wird jeweils so lange gewartet, bis sich ein stationärer thermischer Zustand eingestellt hat. Ein stationärer Zustand ergibt sich bei den untersuchten Prüflingen nach etwa 75 Minuten. Somit beträgt die Dauer einer Messung ca. sechs Stunden. Während der Messungen ist die Temperaturkammer demontiert, so dass der Aktor frei im Raum steht. Der Aktor ist an seiner Mantelfläche der Umgebungsluft ausgesetzt, so dass über Konvektion Wärme abgeführt wird. Der axiale Wärmestrom wird durch die in Abschnitt 3.3 erläuterten Wärmestromsensoren erfasst. Um später den Wärmeübergangskoeffizienten zu bestimmen, wird zusätzlich die Umgebungstemperatur erfasst.

---

### 3.7.1 Verlustleistungsregelung

---

Die Charakterisierung des thermischen Materialverhaltens des Aktors wird erheblich vereinfacht, wenn die Möglichkeit besteht den Aktor bei einer konstanten Verlustleistung zu betreiben. Deshalb wurde am Prüfstand eine Verlustleistungsregelung implementiert. Um eine definierte Verlustleistung zu erhalten wird an den Prüfling ein harmonisches elektrisches Feld der Form

$$E_{(\tau)} = \hat{E} \sin(2\pi f - \gamma) + \hat{E} \quad (3.20)$$

angelegt. Aus der gemessenen Stromstärke und Spannung wird zunächst die momentane elektrische Leistung ermittelt. Durch zeitliche Integration der momentanen Leistung über die Dauer einer Periode des angelegten elektrischen Feldes wird die Verlustarbeit pro Schwingungsperiode ermittelt. Durch Beziehen der so ermittelten Verlustarbeit auf die Periodendauer des Testsignals erhält man die mittlere Verlustleistung des Aktors. Bei Verwendung eines Signals mit konstanter Frequenz und Amplitude erhält man bei längeren Messungen eine nicht konstante Verlustleistung. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich der Aktor aufgrund der Verlustleistung erwärmt und sich so die Verlustcharakteristik verändert. Deshalb wird mit Hilfe eines PI-Reglers die Frequenz  $f$  des harmonischen Testsignals so angepasst, dass sich eine konstante Verlustleistung ergibt. Dabei ist darauf zu achten, dass bei einer Änderung der Frequenz  $f$  der Phasenwinkel  $\gamma$  so angepasst wird, dass keine unerwünschten Spannungssprünge entstehen. Die Vorgehensweise ist in Abbildung 3.3 schematisch dargestellt.

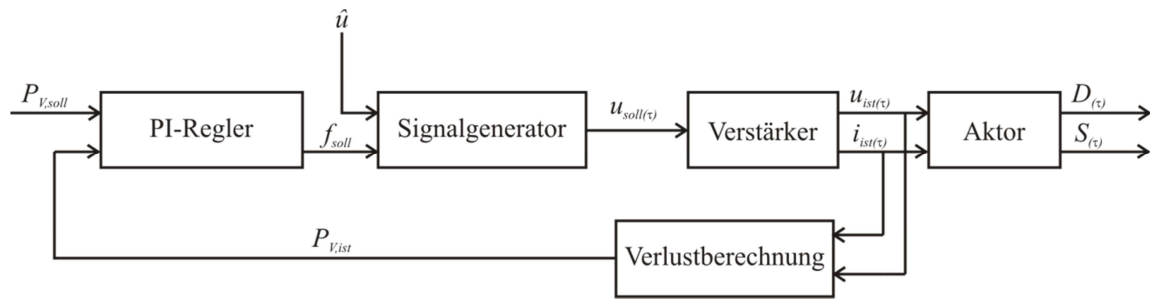


Abbildung 3.3 Schematische Darstellung der Verlustleistungsregelung.



## 4 Experimentelle Ergebnisse

Kapitel 4 stellt einige experimentelle Ergebnisse dar. Zunächst werden die nach den in Kapitel 3.5 und 3.6 beschriebenen Verfahren ermittelten linearen Modellparameter vorgestellt. Anschließend werden Messungen des Großsignalverhaltens, der Großsignalverluste und der Eigenerwärmung präsentiert.

### 4.1 Kleinsignalmesswerte

In diesem Kapitel werden die mit der Berlincourt und der resonanten Messmethode ermittelten Kleinsignalparameter der untersuchten Materialien PIC 151, PIC 181 und PIC 255 gegenübergestellt. Bei PIC 151 und PIC 255 handelt es sich um weiche Piezokeramiken. PIC 181 ist eine harte Piezokeramik. Es sei an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, dass es sich bei den dargestellten experimentellen Ergebnissen nur um Stichproben handelt, welche keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit haben. Die Materialparameter der sonst üblichen Keramikproben können deshalb von den hier dargestellten Messergebnissen abweichen.

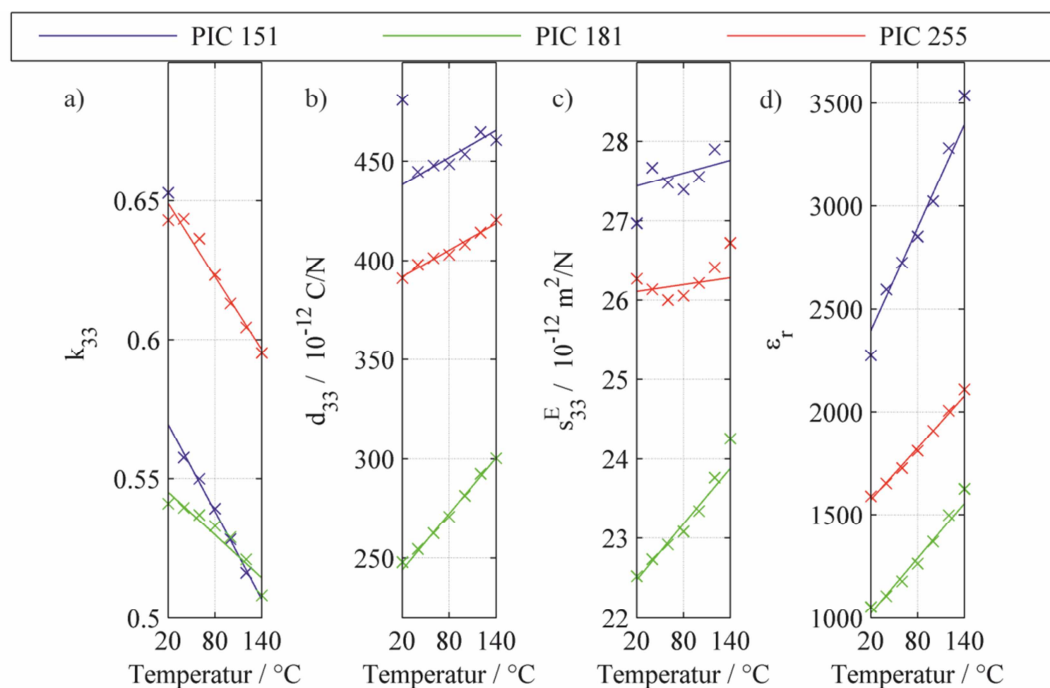


Abbildung 4.1 Mit der resonanten Messmethode ermittelte Kleinsignalparameter von PIC 151, PIC 181 und PIC 255.

Abbildung 4.1 fasst die Ergebnisse der resonanten Messmethode für die drei untersuchten Materialien zusammen. Die Messwerte für PIC 151 sind blau, die Messwerte für PIC 181 grün und die Werte für PIC 255 rot dargestellt. Die Kreuze stehen jeweils für einen einzelnen Messpunkt. Die durchgezogenen Linien entsprechen einem linearen Regressionspolynom, wobei Ausreißer nicht berücksichtigt wurden. Bei der resonanten Methode muss der Aktor frei stehen, da jegliche

mechanische Belastung das Ergebnis verfälscht. Eine Untersuchung bei unterschiedlichen mechanischen Vorspannungen bzw. unter realen Einbaubedingungen ist somit nicht möglich, so dass lediglich die Temperatur variiert werden kann. Die Variation der Temperatur erfolgte in einem Temperaturbereich von 20 °C bis 140 °C. Abbildung 4.1 a) zeigt den piezoelektrischen Koppelfaktor, welcher nach Gleichung (3.6) aus der Resonanz und der Antiresonanzfrequenz berechnet wurde. Der Koppelfaktor nimmt bei allen drei untersuchten Materialien mit zunehmender Temperatur ab, wobei der Abfall bei PIC 181 am schwächsten ausgeprägt ist. Abbildung 4.1 b) stellt die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  dar. Diese nimmt bei allen Materialien leicht zu. Mit ca. 17 % tritt der größte relative Anstieg bei PIC 181 auf. Erwartungsgemäß liegt die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  bei PIC 181 deutlich niedriger als bei den anderen beiden Materialien. Dies ist auf die piezoelektrisch harte Materialcharakteristik zurückzuführen. In Abbildung 4.1 c) wird die piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  dargestellt. Die Temperaturabhängigkeit dieser ist bei allen drei Materialien nur schwach ausgeprägt. Bei PIC 151 und PIC 255 nimmt die Nachgiebigkeit zunächst bis ca. 60 °C beziehungsweise 80 °C leicht ab und anschließend wieder leicht zu. Bei PIC 181 ergibt sich ein leichter kontinuierlicher Anstieg der Nachgiebigkeitskonstanten. In Abbildung 4.1 d) wird die relative Permittivitätszahl  $\epsilon_r$  über der Temperatur aufgetragen. Diese nimmt bei allen drei Materialien deutlich zu. Die größte absolute Änderung ergibt sich mit etwa 1000 bei PIC 151. Prozentual gesehen ergibt sich mit ca. 50 % bei PIC 181 der größte Anstieg. Die in Abbildung 4.1 vereinzelt auftretenden Ausreißer sind vermutlich auf Ungenauigkeiten des verwendeten Impedanzmessgerätes zurück zu führen.

Im Weiteren werden die Ergebnisse nach der Berlincourt Methode vorgestellt. Die Messungen wurden wie in Kapitel 3.5.2 beschrieben durchgeführt. Die Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  ist nach der in Anhang A.1 beschriebene Methode korrigiert. Die Messungen wurden bei mechanischen Vorspannungen von 7,5 MPa, 15 MPa und 30 MPa durchgeführt. Dies entspricht typischen Werten der Aktorvorspannung bei dynamischen Anwendungen.

Abbildung 4.2 zeigt die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  sowie die Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  eines Aktors aus PIC 151 Material. Die mit der Berlincourt Methode bestimmten Werte der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  liegen etwas unterhalb der Ergebnisse der resonanten Methode. Die genaue Ursache hierfür ist unbekannt, jedoch bieten die bei der Herleitung der Gleichungen der resonanten Methode gemachten Annahmen einen Erklärungsansatz für die Abweichungen. Auch bei der Berlincourt Methode auftretende Einspannungseffekte können verantwortlich sein. Eine Erhöhung der mechanischen Vorspannung führt bei Vorspannungen von 7,5 MPa und 15 MPa unabhängig von der Temperatur zu einer Vergrößerung der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$ . Bei einer Vorspannung von 30 MPa liegt die piezoelektrische Ladungskonstante oberhalb einer Temperatur von ca. 60 °C unterhalb des Wertes bei 15 MPa. Die piezoelektrische Ladungskonstante nimmt, mit Ausnahme der Messungen bei 120 °C (evtl. ein Messfehler), bei allen drei Vorspannungen kontinuierlich ab. Die Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  zeigt bei Vorspannungen von 7,5 MPa und 15 MPa keine wesentliche Temperaturabhängigkeit. Bei einer Vorspannung von 30 MPa nimmt die Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  mit der Temperatur deutlich ab. Über das ungewöhnliche Verhalten bei 30 MPa lässt sich nur

spekulieren. Gegebenenfalls wird beim Vorspannen auf 30 MPa ein Großteil der mechanisch schaltbaren Domänen bereits umgepolt. Diese lassen sich dann durch weitere mechanische Spannungen nicht mehr bewegen, so dass sich eine geringere piezoelektrische Ladungskonstante und eine höhere Nachgiebigkeit  $s_{33}^E$  ergeben.

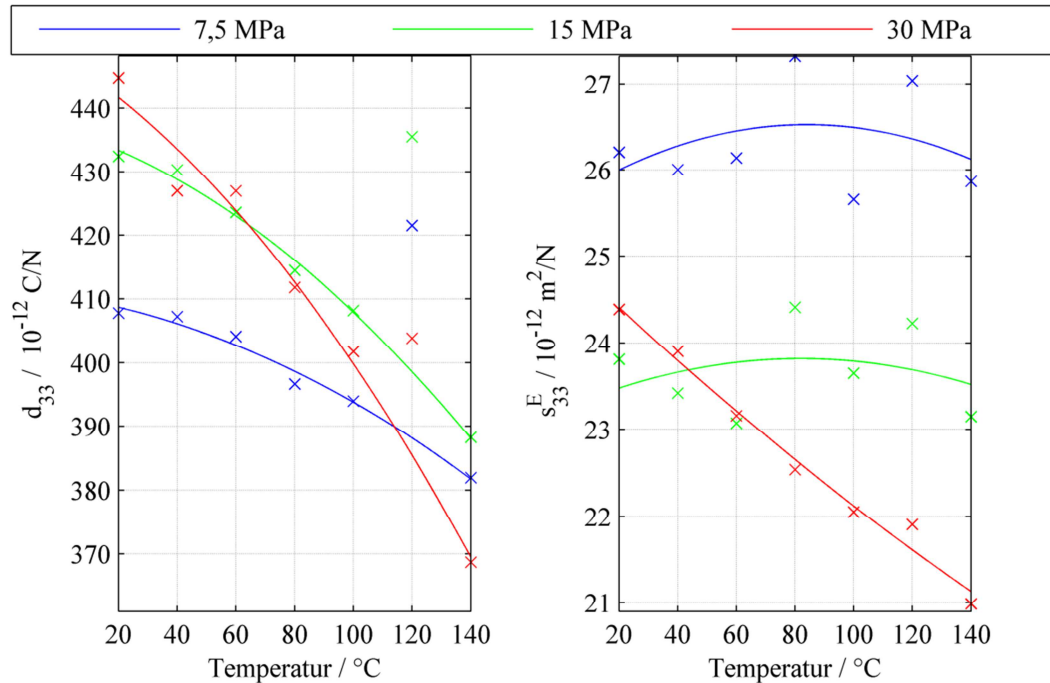


Abbildung 4.2 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 151.

Abbildung 4.3 zeigt die Ergebnisse der Berlincourt Methode für PIC 181. Die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  ist erneut etwas geringer als bei der Bestimmung mit der resonanten Methode. Die Erhöhung der mechanischen Vorspannung wirkt sich ähnlich wie bei PIC 151 aus. Mit zunehmender Vorspannung ergeben sich höhere Werte für  $d_{33}$ . Außerdem nimmt  $d_{33}$  mit der Temperatur linear zu. Eine Ausnahme ergibt sich bei einer Vorspannung von 30 MPa bei Temperaturen über 100 °C. Hier bleibt  $d_{33}$  nahezu konstant. Die Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  ist für alle drei Vorspannungen kaum von der Temperatur abhängig. Es zeigt sich jedoch eine deutliche Abhängigkeit von der mechanischen Vorspannung. Die Nachgiebigkeit bei 7,5 MPa Vorspannung ist um ca. 30 % höher als bei 15 MPa. Zwischen 15 MPa und 30 MPa liegt nur noch eine geringere Änderung der Vorspannung von ca. 5 % vor. Marszolek [22] erklärt dieses Verhalten mit der Nachgiebigkeit der Klebeschicht, welche die Keramikscheiben des Aktors verbindet. Bei hohen Vorspannungen ist diese seiner Ansicht nach vollständig zusammengepresst, so dass sich die reine Keramiksteifigkeit des Aktors ergibt. Aufgrund der Vielzahl von Fügstellen innerhalb des Prüfstandsbaus kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass die Zunahme der Steifigkeit auch teilweise auf Setzphänomene innerhalb des verwendeten Prüfstands zurückzuführen ist. Dies lässt sich abschließend nicht feststellen. Es ist aber zu vermuten, dass beide Phänomene einen Einfluss auf die Messergebnisse haben, so dass eine Interpretation der Ergebnisse schwierig ist.

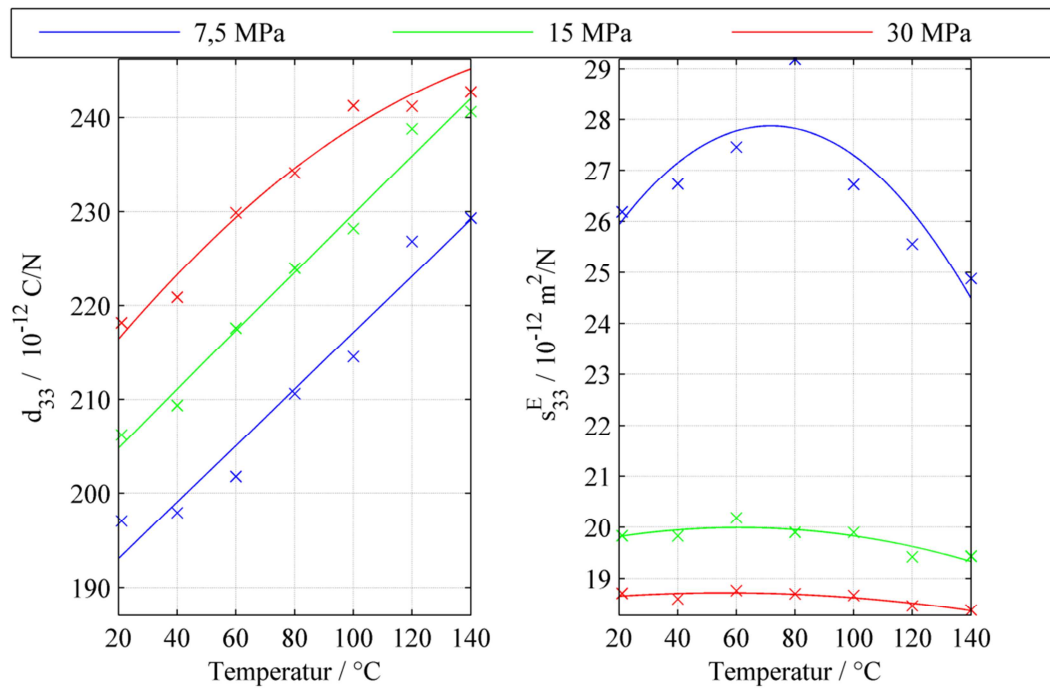


Abbildung 4.3 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 181.

Abbildung 4.4 stellt die Ergebnisse eines Aktors aus PIC 255 Material dar. Diese weichen sowohl qualitativ als auch quantitativ von den Ergebnissen von PIC 151 und PIC 181 ab. Die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  steigt für eine Vorspannung von 7,5 MPa über den gesamten untersuchten Temperaturbereich kontinuierlich an. Bei einer Vorspannung von 15 MPa nimmt die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  zunächst bis zu einer Temperatur von 120 °C zu und anschließend wieder leicht ab. Bei einer Vorspannung von 30 MPa ergibt sich qualitativ ein ähnlicher Verlauf, jedoch liegt das Maximum der piezoelektrischen Ladungskonstanten bei dieser Vorspannung bei einer Temperatur von 80 °C. Die piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33}^E$  nimmt mit der Temperatur zu, wobei der Anstieg bei den Vorspannungen von 7,5 MPa und 15 MPa stärker ausfällt als bei 30 MPa.



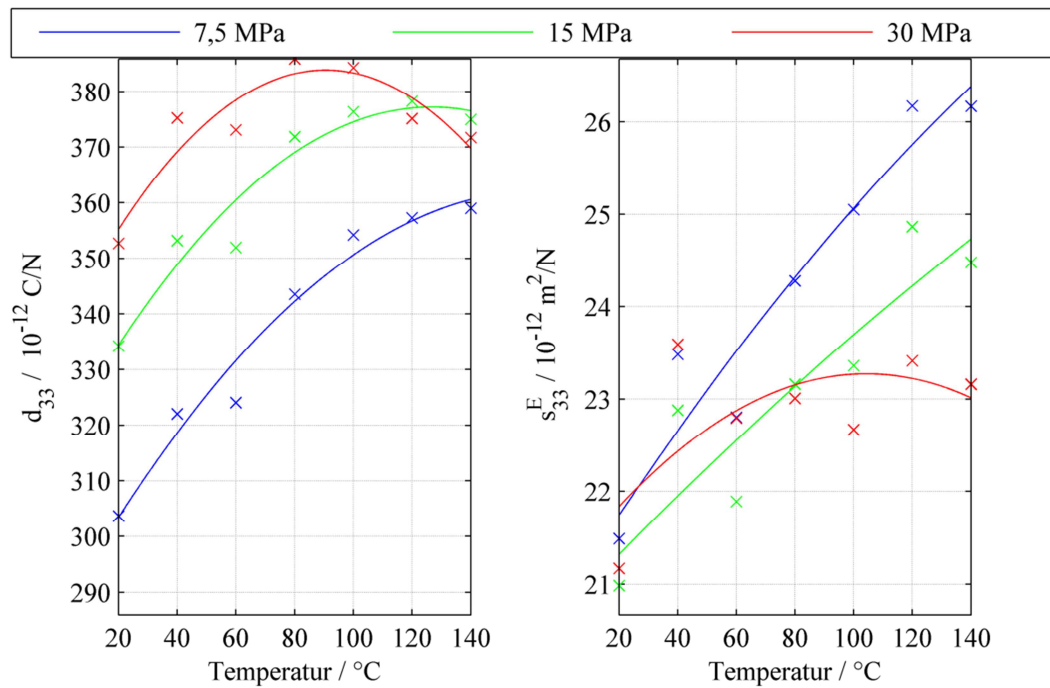


Abbildung 4.4 Mit der Berlincourt Methode ermittelte Kleinsignalparameter für PIC 255.

Erst bei der integralen Betrachtung der Ergebnisse aller drei untersuchten Keramiken ergibt sich ein schlüssiges Bild. Um dieses zu erkennen, müssen die unterschiedlichen Curie-Temperaturen sowie die unterschiedlichen Materialcharakteristiken der untersuchten Keramiken berücksichtigt werden. Die weiche PCI 151 Keramik hat mit 250 °C die niedrigste Curie-Temperatur. Die Curie-Temperatur der harten PIC 181 Keramik liegt bei 330 °C und die Curie-Temperatur der weichen PIC 255 Keramik liegt bei 350 °C. Im Allgemeinen nimmt die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  zunächst bis zu einer gewissen Temperatur zu und dann wieder ab [19]. Der anfängliche Anstieg ist auf eine temperaturbedingte Erhöhung der Domänenmobilität zurückzuführen. Bei einer Annäherung an die Curie-Temperatur gehen die piezoelektrischen Eigenschaften zunehmend verloren, so dass die piezoelektrische Ladungskonstante wieder abfällt. Ähnliches gilt für den Einfluss der Vorspannung  $T_0$ . Eine Erhöhung dieser führt zunächst zu einem Anstieg der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$ . Ist eine hinsichtlich der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  optimale Vorspannung erreicht, welche in der Größenordnung von 50 MPa liegt, nimmt dieser wieder ab [44], [160]. Somit sind alle Messungen in dieser Arbeit in einem Vorspannungsbereich durchgeführt, in welchem die piezoelektrische Ladungskonstante zunehmen sollte. Dieser Effekt lässt sich mit der Modellvorstellung des Domänenwanddruckes [161], [162] sowie der Koexistenz von 90° und 180° Schaltprozessen erklären. 90° Schaltprozesse treten dann auf, wenn ein Material mechanisch vorgespannt wird. Dann weichen die piezoelektrischen Domänen bildlich gesprochen der mechanischen Druckspannung aus, indem sie sich 90° zu dieser ausrichten. Diese mechanisch umgepolten Domänen lassen sich anschließend besonders leicht wieder in Richtung des elektrischen Feldes ausrichten, so dass die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  zunächst zunimmt. Ist eine gewisse Vorspannung erreicht, dominiert jedoch

der mechanisch induzierte Domänenwanddruck, so dass die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33}$  wieder abnimmt. Bei der Überlagerung beider soeben erläuterten Effekte ergibt sich, die in Abbildung 4.5 a) schematisch dargestellte Abhängigkeit der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  von der Temperatur  $\theta$  und der mechanischen Vorspannung  $T_0$ . Geht man zusätzlich davon aus, dass sich die für ein optimales  $d_{33}$  notwendige Temperatur  $\theta$  mit zunehmender Vorspannung  $T_0$  hin zu niedrigeren Temperaturen verschiebt, so ergibt sich das in Abbildung 4.5 b) dargestellte Verhalten. Mit diesem angenommenen Globalverhalten lassen sich die Messwerte, wie in Abbildung 4.5 c) dargestellt, gut interpretieren. PIC 181 hat eine relativ hohe Curie-Temperatur von 330 °C und ist als harte Keramik im Vergleich zu weichen Keramiken temperatur- und druckstabiler [19],[43]. Somit befindet sich PIC 181 im untersuchten Temperaturbereich, wie in Abbildung 4.5 c) grün dargestellt, noch im Bereich der ansteigenden piezoelektrischen Ladungskonstanten. Bei der weichen PIC 255 Keramik mit einer ähnlich hohen Curie-Temperatur von 350°C umfasst der untersuchte Temperaturbereich die hinsichtlich der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  optimale Temperatur. Bei einer Vorspannung von 15 MPa bzw. 30 MPa liegt diese bei 120 °C bzw. 80 °C. Der für PIC 255 relevante Temperaturbereich ist in Abbildung 4.5 c) blau dargestellt. Die ebenfalls weiche PIC 151 Keramik mit ihrer deutlich niedrigeren Curie-Temperatur von 250 °C befindet sich im untersuchten Temperaturbereich, wie in rot angedeutet, bereits im Gebiet mit abfallender piezoelektrischer Ladungskonstanten  $d_{33}$ . Dabei stimmt die Charakteristik der sich schneidenden Linien sehr gut mit den Messwerten überein, welche die gleiche Charakteristik aufweisen. Dies unterstreicht die Hypothese einer Verschiebung der hinsichtlich der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  optimalen Temperatur hin zu niedrigeren Temperaturen mit zunehmender mechanischer Vorspannung  $T_0$ .

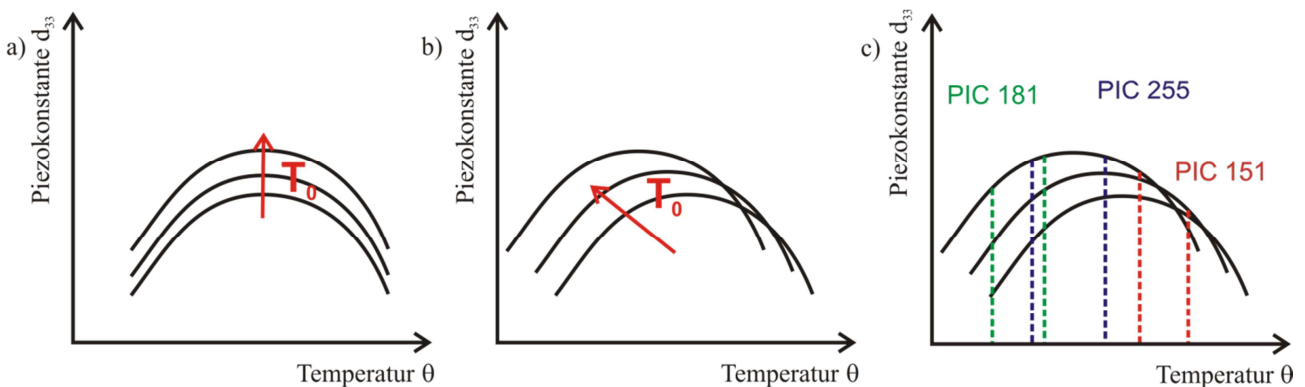


Abbildung 4.5 Erklärungsmodell des Globalverhaltens der piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{33}$  hinsichtlich der Temperatur  $\theta$  und der Vorspannung  $T_0$  bei Verwendung der Berlincourt Methode.

Auf eine genaue Diskussion der gemessenen Nachgiebigkeitskonstanten  $s_E^{33}$  wird aufgrund der oben erläuterten Problematik mit den möglichen Setzphänomenen verzichtet. Die mit der Berlincourt Methode ermittelten Werte liegen jedoch in der gleichen Größenordnung wie die mit der resonanten Methode bestimmten Werte.

---

## 4.2 Großsignalmesswerte

---

Bei Anwendungen der aktiven Schwingungsbeeinflussung werden die Aktoren typischerweise im Großsignalbereich betrieben. Die Ergebnisse der Großsignalmessungen für die drei untersuchten Materialien werden nachfolgend dargestellt. Abschnitt 4.2.1 zeigt die nach dem in Abschnitt 3.6 definierten Verfahren bestimmten linearen Großsignalparameter. Abschnitt 4.2.2 stellt die Großsignalhysteresekurven der untersuchten Materialien gegenüber. Abschnitt 4.2.3 befasst sich mit den gemessenen Großsignalverlusten.

---

### 4.2.1 Lineare Großsignalparameter

---

Abbildung 4.6 bis Abbildung 4.8 stellen die piezoelektrischen Großsignalladungskonstante  $d_{33,g}$  der drei untersuchten Materialien in Abhängigkeit der mittleren Aktortemperatur und der mechanischen Vorspannung dar. Die blauen Punkte sind aus Messungen hervorgegangen. Bei den teiltransparent dargestellten Flächen handelt es sich um ein biquadratisches Ausgleichspolynom. Für PIC 151 und PIC 255 ergibt sich ein qualitativ sehr ähnliches Verhalten. Die piezoelektrische Ladungskonstante  $d_{33,g}$  steigt in Abhängigkeit von der Vorspannung leicht und in Abhängigkeit von der Temperatur stärker an. Somit deckt sich das Verhalten der beiden Keramiken hinsichtlich der Vorspannung mit den Ergebnissen der Berlincourt Methode. Die piezoelektrische Ladungskonstante für PIC 151 steigt jedoch bei den Großsignalmessungen mit der Temperatur an, wohingegen sie bei den Kleinsignalmessungen nach der Berlincourt Methode abfiel. Somit zeigen sich hier deutliche Unterschiede zwischen Klein- und Großsignalwerten. PIC 181 zeigt eine ähnlich ausgeprägte Temperaturabhängigkeit wie die beiden anderen Materialien. Jedoch ist die Abhängigkeit von der mechanischen Vorspannung nur sehr schwach ausgeprägt. Dies lässt sich mit der harten Materialcharakteristik und der damit verbundenen reduzierten Domänenwandmobilität erklären. Offensichtlich werden durch die mechanische Vorspannung keine Domänenschaltprozesse ausgelöst, so dass sich keine Änderung der piezoelektrischen Eigenschaften ergibt.

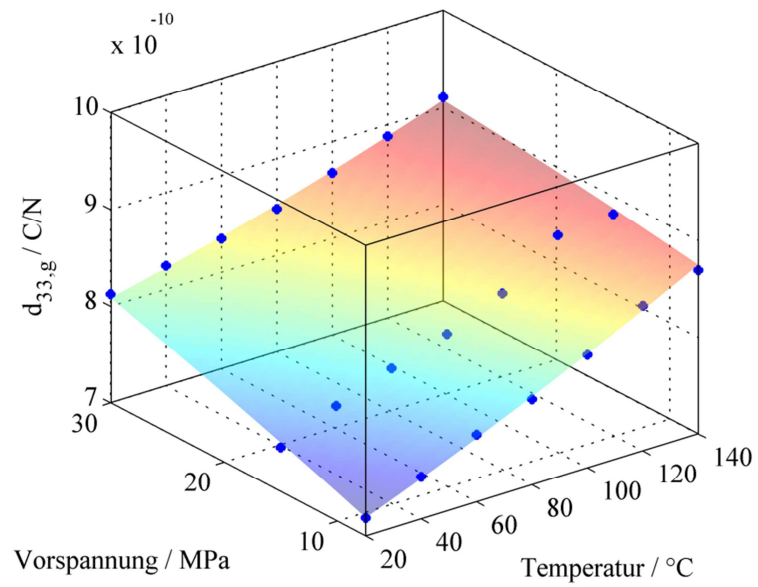


Abbildung 4.6 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 151.

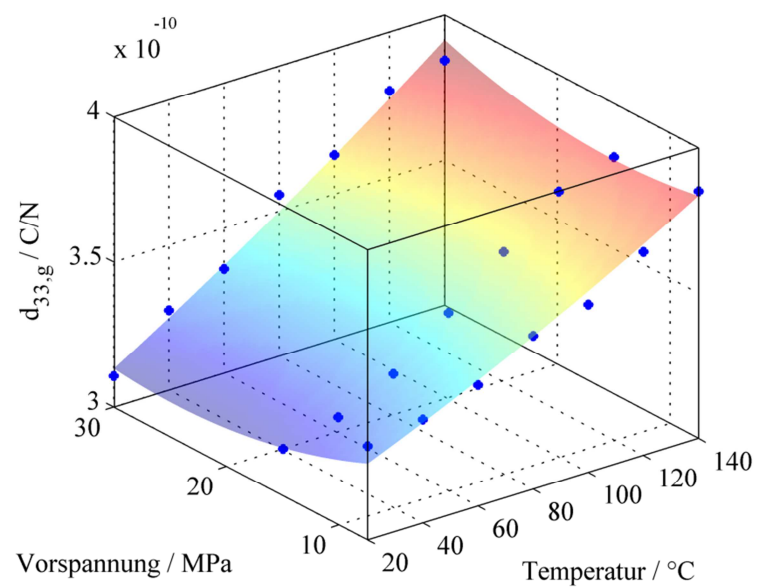


Abbildung 4.7 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 181.

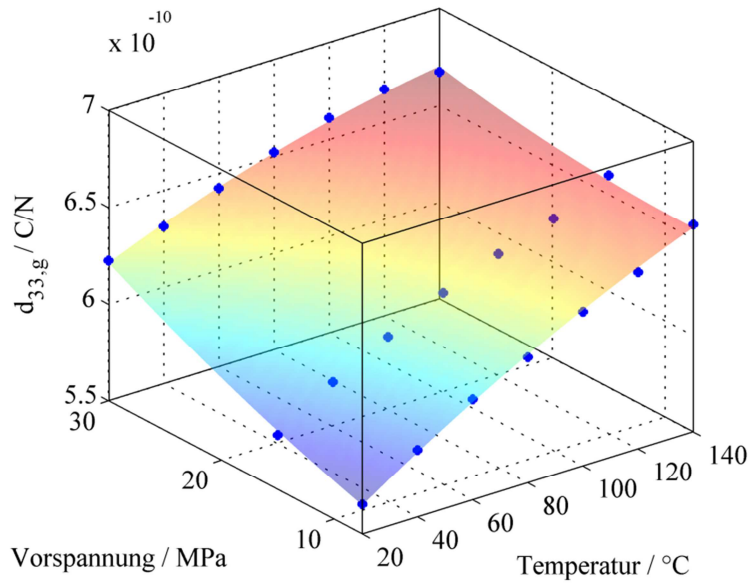


Abbildung 4.8 Piezoelektrische Großsignalladungskonstante von PIC 255.

Die gemessenen Großsignalpermittivitäten  $\epsilon_3$  der drei Materialien sind in den Abbildung 4.9 bis Abbildung 4.11 dargestellt. Qualitativ ergibt sich ein sehr ähnliches Verhalten wie bei der piezoelektrischen Großsignalladungskonstanten  $d_{33,g}$ . Bei PIC 151 und PIC 255 steigt die Permittivität leicht mit der mechanischen Vorspannung und stärker mit der Aktortemperatur an. Bei PIC 181 zeigt sich erneut eine nur sehr schwache Vorspannungsabhängigkeit, jedoch eine umso stärker ausgeprägte Temperaturabhängigkeit.

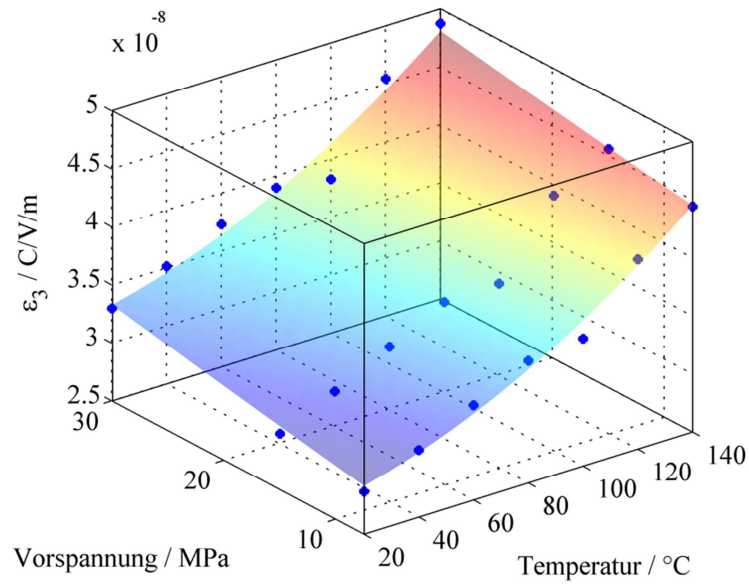


Abbildung 4.9 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 151.

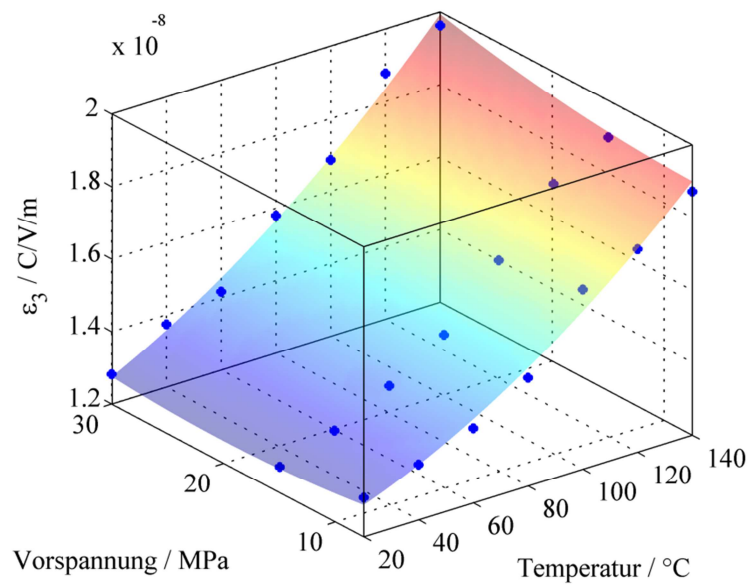


Abbildung 4.10 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 181.

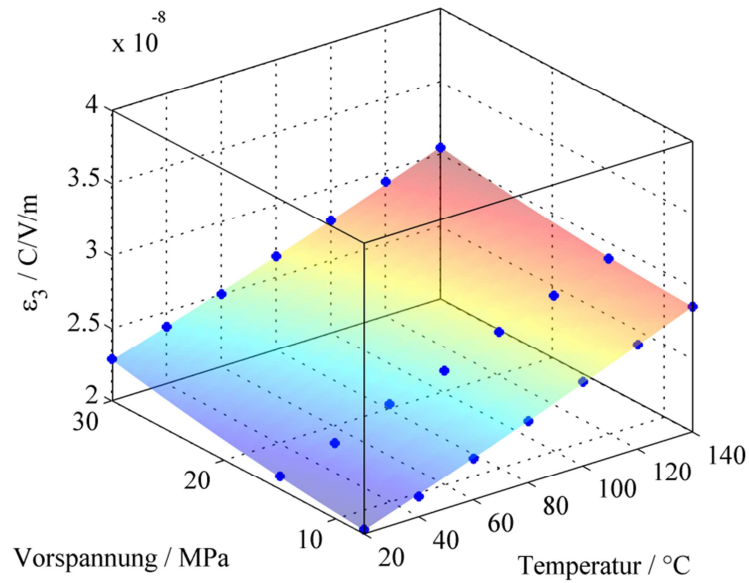


Abbildung 4.11 Absolute Großsignalpermittivität von PIC 255.

In Abbildung 4.12 bis Abbildung 4.14 sind die piezoelektrischen Großsignalnachgiebigkeitskonstanten  $s_{33,g}$  dargestellt. Die Messwerte schwanken relativ stark und lassen sich nur mäßig durch die biquadratischen Ausgleichspolynome annähern. Ursachen für die großen Schwankungen liegen vermutlich im Prüfstands Aufbau. Die Abhängigkeit der Nachgiebigkeitskonstanten  $s_{33,g}$  von Vorspannung und Temperatur ist schwächer ausgeprägt als bei piezoelektrischen Ladungskonstanten und der Permittivität. Die Differenz zwischen dem jeweils größten und kleinsten gemessenen Wert liegt bei circa 10 %. Bei der Permittivität ergaben sich teilweise Änderungen von bis zu 70 %.

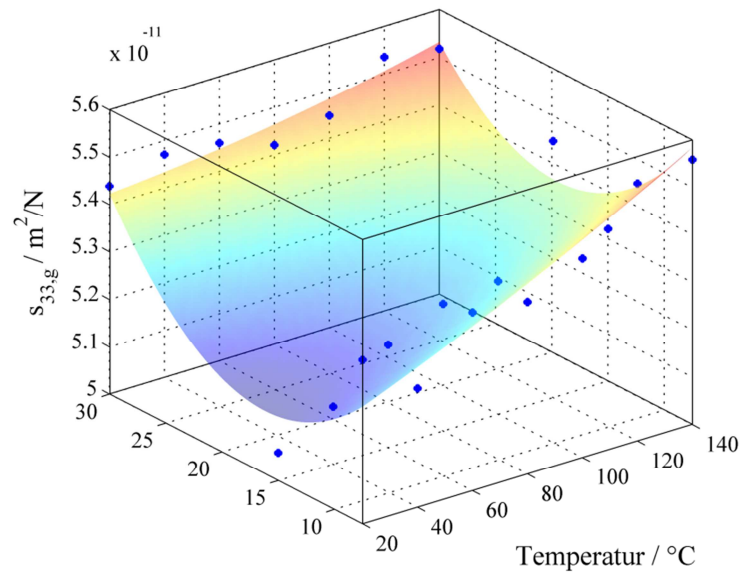


Abbildung 4.12 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33,g}$  von PIC 151.

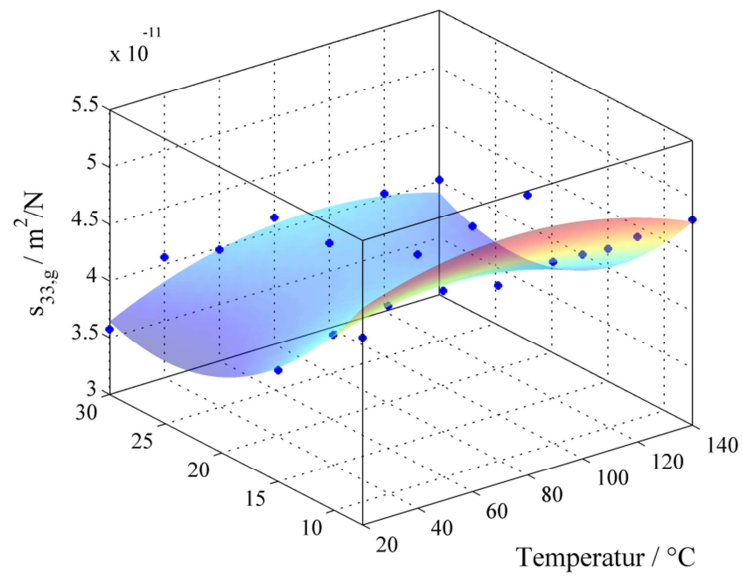


Abbildung 4.13 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33,g}$  von PIC 181.



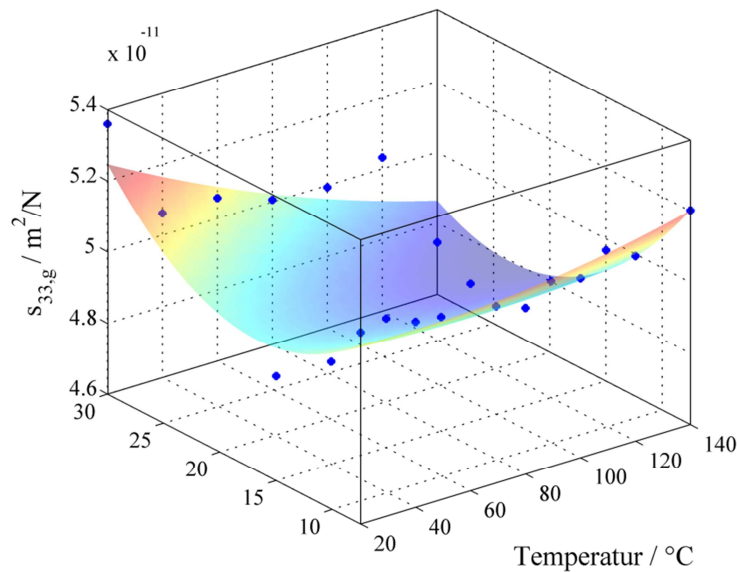


Abbildung 4.14 Piezoelektrische Nachgiebigkeitskonstante  $s_{33,g}$  von PIC 255.

Warum die Ergebnisse der Berlincourt Methode qualitativ von den Ergebnissen der Großsignalmethode abweichen, lässt sich nicht mit Sicherheit feststellen. Es sei an dieser Stelle jedoch ein Erklärungsansatz gegeben. Bei der Berlincourt Methode mit Vorspannung wird im mechanischen Druckbereich gearbeitet. Die Domänenschaltprozesse werden durch zusätzlichen mechanischen Druck hervorgerufen. Durch die Druckspannungen treten überwiegend  $90^\circ$  Schaltprozesse im Material auf, d. h., die piezoelektrischen Domänen richten sich senkrecht zur Druckspannung aus. Die Vorspannung und die zum Bestimmen der piezoelektrischen Ladungskonstanten überlagerte Druckkraft führen also zu einer Ausrichtung der Domänen in die gleiche Richtung. Bei der Großsignalmethode wird zusätzlich zur mechanischen Druckvorspannung ein elektrisches Feld angelegt, welches entgegen der Druckvorspannung wirkt. Somit ist die Wirkrichtung der beiden Belastungskomponenten (mechanische Vorspannung und E-Feld) bei der Großsignalmessung gegensätzlich. Dies führt dazu, dass sich die durch den Vorspannvorgang mechanisch geschalteten Domänen durch das elektrische Feld wieder zurück drehen lassen. Zusätzlich sind  $180^\circ$  Schaltprozesse möglich.

Besonders deutlich wird diese Diskrepanz, wenn der Fall einer vollständigen mechanischen Depolarisation betrachtet wird. Mit der Berlincourt Methode lässt sich, da ja keine mechanisch schaltbaren Domänen mehr zur Verfügung stehen, kein piezoelektrischer Effekt nachweisen. Mit der Großsignalmethode ergibt sich auch in einem depolarisierten Zustand ein piezoelektrischer Effekt, da sich die Domänen durch das elektrische Feld entgegen der Druckvorspannung ausrichten lassen, was einer Neupolung der Keramik entspricht.

Vermutlich tritt dieser Effekt in abgeschwächter Form bei den untersuchten Materialien auf. Mit zunehmender Temperatur nimmt die Domänenwandmobilität zu. Somit wird mit steigender Temperatur bereits durch den Vorspannvorgang ein immer größer werdender Teil der mechanisch

---

schaltbaren Domänen umgeklappt. Somit stehen bei einer höheren Temperatur weniger Domänen zur Verfügung, welche sich mechanisch schalten lassen, was eine abnehmende piezoelektrische Ladungskonstante nach sich zieht. Die Anzahl der elektrisch schaltbaren Domänen nimmt jedoch zu, da das elektrische Feld die Domänen entgegen der mechanischen Spannung ausrichten kann. Somit ergibt sich bei der Großsignalmessung eine ansteigende piezoelektrische Ladungskonstante. Dieser Effekt ist bei den drei untersuchten Materialien unterschiedlich stark ausgeprägt, was zum einen auf die unterschiedlichen Curie-Temperaturen und zum anderen auf die harte Materialcharakteristik von PIC 181 zurückzuführen ist. Beim weichen PIC 151 Material ist der Effekt am ausgeprägtesten, da dieses die niedrigste Curie-Temperatur hat und sich somit besonders leicht mechanisch depolarisieren lässt. PIC 255 zeigt den Effekt ebenfalls deutlich, hat aber eine höhere Curie-Temperatur, so dass die Auswirkungen schwächer sind. PIC 181 zeigt den Effekt nur sehr schwach, was auf seine harte Materialcharakteristik und hohe Curie-Temperatur zurückzuführen ist.

Die resonante Methode arbeitet ebenfalls mit elektrischer Anregung und darüber hinaus vorspannungsfrei, so dass keine mechanische Depolarisation auftreten kann. Deshalb ergeben sich mit dieser Methode qualitativ zur Großsignalmethode vergleichbare Ergebnisse.

---

#### 4.2.2 Gegenüberstellung der Großsignalhysterese

---

Dieses Unterkapitel vergleicht die Hysteresekurven der drei untersuchten Materialien PIC 151, PIC 181 und PIC 255 miteinander. Die in Abbildung 4.15 dargestellten Messwerte sind bei einer Umgebungssteifigkeit von  $30 \text{ N}/\mu\text{m}$ , bei einer Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  und einer mechanischen Vorspannung von  $7,5 \text{ MPa}$  ermittelt. Wie schon die linearen Großsignalparameter vermuten lassen, weist der Aktor aus PIC 151 sowohl die höchste Dehnung als auch die höchste elektrische Flussdichte auf. Die Werte des Aktors aus PIC 255 liegen etwa 20 %, die des Aktors aus PIC 181 um 50 % niedriger. Die  $D - E$  und  $S - E$  Hysteresekurven der beiden Aktoren aus weichem Keramikmaterial sind ähnlich bauchig ausgeprägt. Die Hysterese des Aktors aus PIC 181 fällt deutlich geringer aus. Bei einer Variation der Vorspannung, der Umgebungssteifigkeit und der Temperatur zeigten alle Materialien qualitativ die in Kapitel 2.6 vorgestellten Abhängigkeiten. Deshalb wird auf eine Darstellung weiterer Messwerte verzichtet.

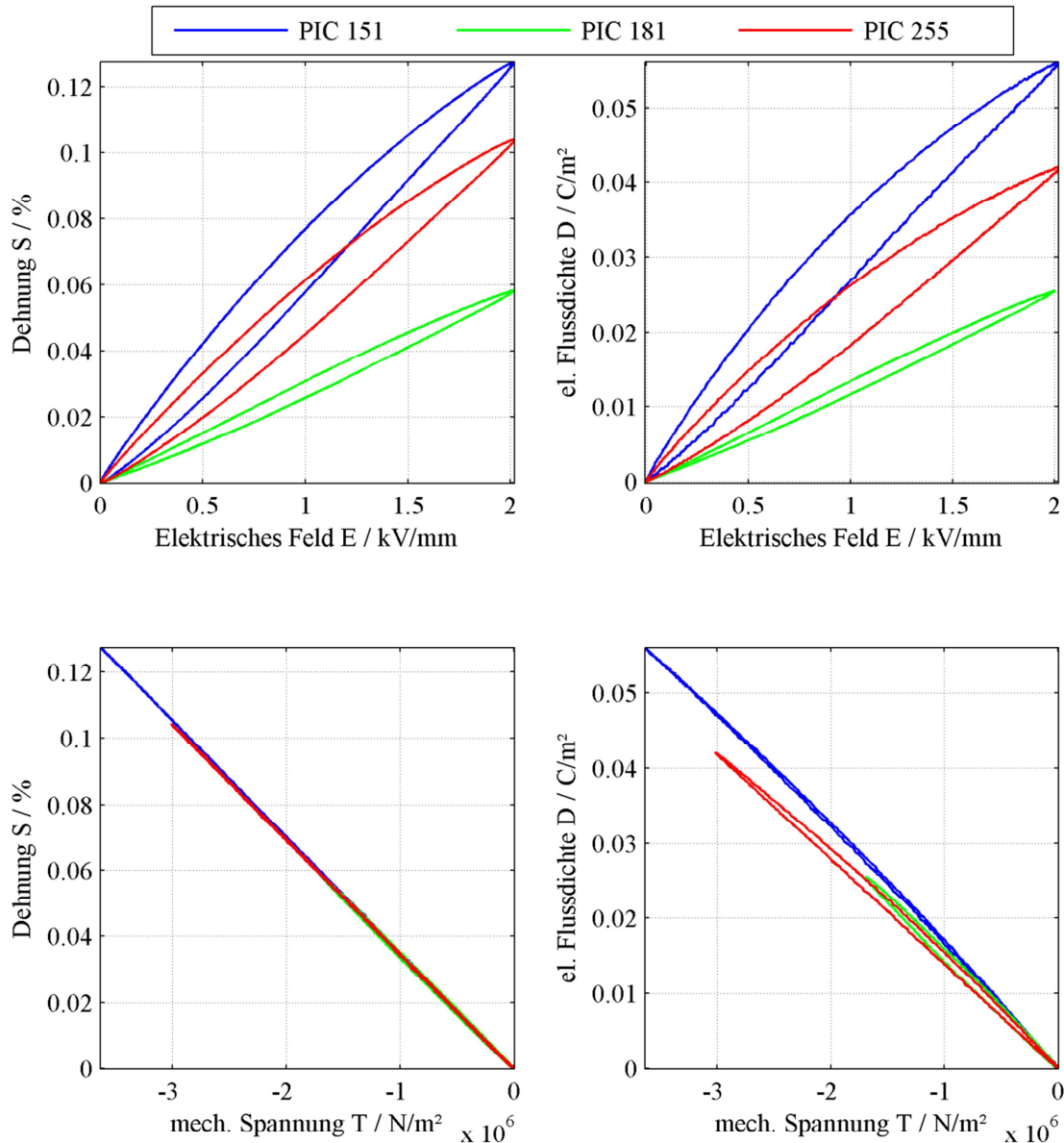


Abbildung 4.15 Vergleich der Großsignalhysterese der drei untersuchten Materialien.

### 4.2.3 Großsignalverluste

Beim Betrieb der Aktoren erwärmen sich diese aufgrund der Aktorverluste. Die auftretenden Verluste hängen, wie bereits erläutert, unter anderem von der Temperatur, der mechanischen Vorspannung sowie der mechanischen Belastung des Aktors ab. Zur Ermittlung der Verluste wurde die Fläche der  $D - E$  Hysterese ausgewertet. Diese entspricht in der verwendeten Einbausituation den Gesamtverlusten, da die Aktoren während der Messungen im Mittel keine mechanische Arbeit verrichten. Das Anregungssignal ist sinusförmig und hat eine Frequenz von 1 Hz. Abbildung 4.16 bis Abbildung 4.18 stellen die Verlustarbeit pro Periode pro Volumen  $w_{p(\theta, T_0, T)}$  für die drei

untersuchten Aktormaterialien grafisch in Abhängigkeit von der peak-peak Amplitude des elektrischen Feldes und den oben erwähnten Einflussfaktoren dar. Eine grobe Abschätzung der Gesamtverlustleistung im dynamischen Betrieb bei sinusartigen Signalen ergibt sich mit

$$\dot{Q}_g = w_{p(\Theta, T_0, T)} V_{eff} f, \quad (4.1)$$

wobei  $V_{eff}$  für das aktivierte Aktorvolumen steht und  $f$  der Signalfrequenz entspricht.

Bei der jeweils links dargestellten Variation der Temperatur sind die Aktoren mit 15 MPa vorgespannt. Die Vorspannung  $T_0$  wird durch den kraftgeregelten Lastaktor konstant gehalten. Die jeweils in der Mitte dargestellte Variation der Vorspannung erfolgte einer Temperatur von 20 °C. Rechts wird der Einfluss der mechanischen Belastung auf die Verluste dargestellt. Unterschiedliche Belastungen wurden durch ideale Federn definierter Steifigkeit simuliert. Die Temperatur beträgt wiederum 20 °C.

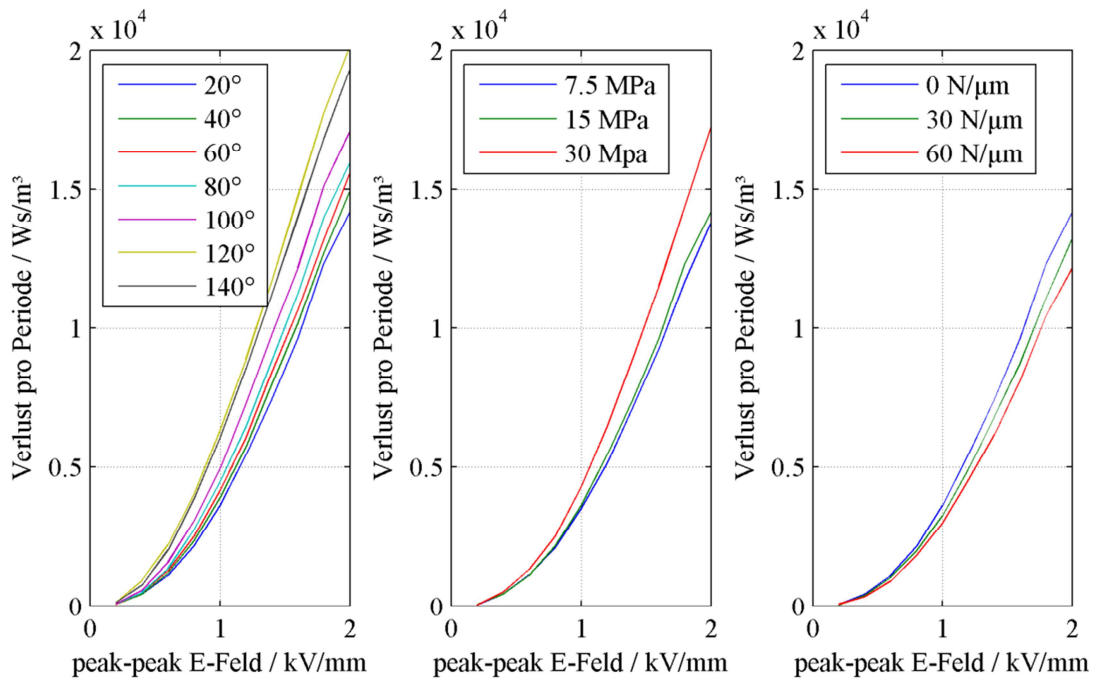


Abbildung 4.16 Großsignalverluste von PIC 151 in Abhängigkeit von der Temperatur (links), der Vorspannung (Mitte) und der Umgebungssteifigkeit (rechts).

Qualitativ zeigen alle drei Materialien ein sehr ähnliches Verhalten. Eine Erhöhung der Aktortemperatur führt im Normalfall zu einer Erhöhung der Verlustleistung. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Domänenwandmobilität mit der Temperatur zunimmt. Eine Vorspannungserhöhung von 7,5 MPa auf 15 MPa führt zu keiner signifikanten Änderung der Verlustarbeit. Erst bei einer Erhöhung auf 30 MPa nimmt diese zu. Die Zunahme der Verluste mit der Vorspannung ist darauf zurückzuführen, dass sich einzelne Domänen durch das Vorspannen senkrecht zur Last ausrichten. Diese lassen sich dann durch das elektrische Feld zurückpolen, so dass die Verluste zunehmen. Eine Erhöhung der Umgebungssteifigkeit führt zu einer Reduktion der Verluste. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die mit dem elektrischen Feld ansteigende

mechanische Spannung ein Umpolen der Domänen verhindert. So werden weniger Domänenwände bewegt und es entstehen weniger Verluste.

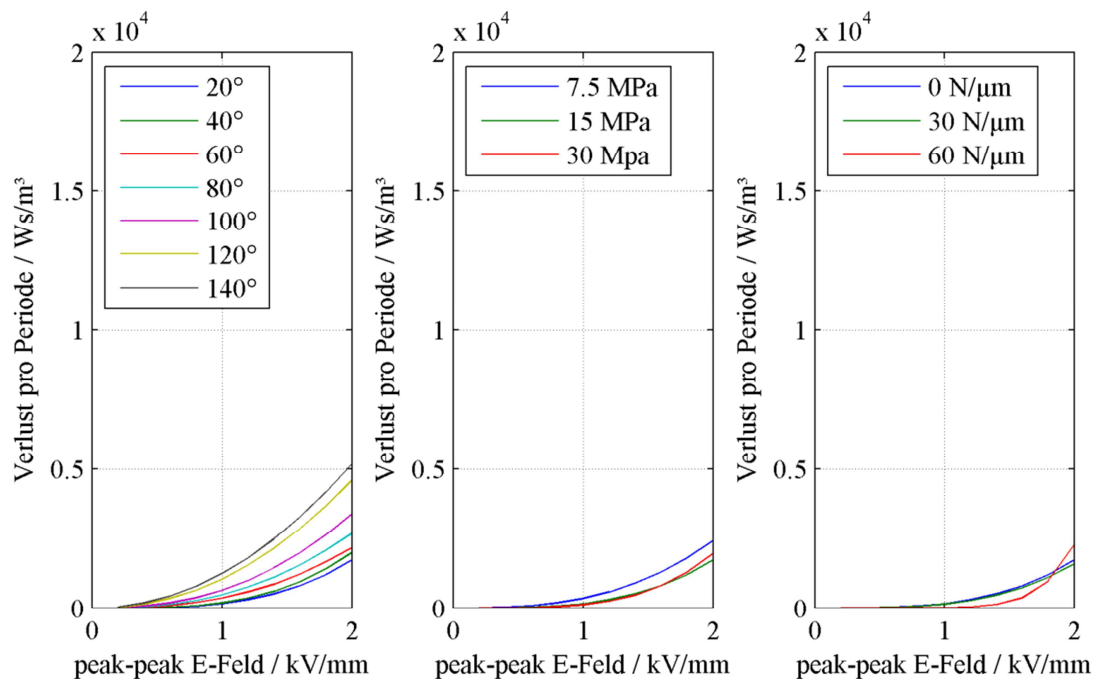


Abbildung 4.17 Großsignalverluste von PIC 181 in Abhängigkeit von der Temperatur (links), der Vorspannung (Mitte) und der Umgebungssteifigkeit (rechts).

Die Verlustarbeit unterscheidet sich betragsmäßig zwischen den drei Materialien deutlich. Die höchsten Verluste weist der Aktor aus PIC 151 Material auf. Die Verluste von PIC 255 sind bei gleicher elektrischer Feldstärke um etwa 20 bis 25 % niedriger, die Verluste des harten PIC 181 Materials um etwa 70 bis 80 %.

Dieses Bild relativiert sich etwas, wenn die Verluste nicht in Bezug zur elektrischen Feldstärke sondern zum Hub des Aktors betrachtet werden. Der Hub eines Aktors aus PIC 151 ist bei identischer Aktorgeometrie und Ansteuerung mit einer elektrischen Feldstärke von 2  $\text{kV/mm}$  etwa 2,3-mal so groß wie bei einem Aktor aus PIC 181. Ein geometrisch gleicher Aktor aus PIC 255 bietet bei gleichem elektrischem Feld in etwas den 1,8-fachen Stellweg. Folglich können die Aktoren aus den weichen Materialien (PIC 151, PIC 255) bei gleichem Hub mit geringerer elektrischer Feldstärke betrieben werden, was die Verluste erheblich reduziert. Da sowohl der E-Feld-Dehnungs- als auch der E-Feld-Verlust-Zusammenhang nichtlinear und zusätzlich von der Aktortemperatur abhängig sind, lassen sich kaum allgemeingültige Aussagen treffen. Es muss stets der konkrete Anwendungsfall zur Auswahl eines optimalen Materials betrachtet werden.

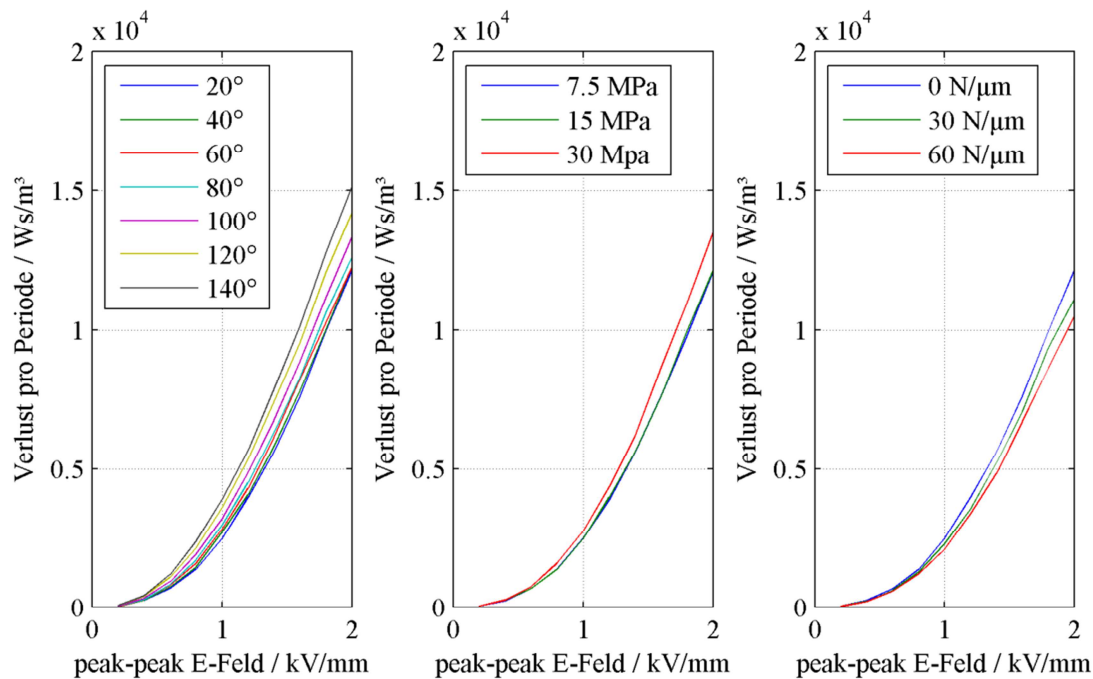


Abbildung 4.18 Großsignalverluste von PIC 255 in Abhängigkeit von der Temperatur (links), der Vorspannung (Mitte) und der Umgebungssteifigkeit (rechts).

### 4.3 Messungen der Eigenerwärmung

Im Hinblick auf die Parameterschätzung für das thermische Aktormodell wurden die Aktoren mit Hilfe der eigentlich unerwünschten Aktorverluste, wie in Abschnitt 3.7 erläutert, gezielt erwärmt. Der Prüfling arbeitete während der Messungen gegen eine lineare Feder, welche über die Kraftregelung des Lastaktors realisiert wurde. Dementsprechend wird auf mechanischem Wege im integralen Mittel keine Arbeit. Die Gesamtverluste des Aktors entsprechen somit exakt der elektrischen Verlustleistung.

Exemplarisch ist in Abbildung 4.19 eine Messung für einen Aktor aus PIC 255 Material dargestellt. Die Gesamtmessdauer der dargestellten Messung beträgt sechseinviertel Stunden. Abbildung 4.19 a) stellt die zugeführte Wärme sowie die mit den Wärmestromsensoren erfassten Wärmeflüsse über die Stirnseiten des Aktors dar. Es fällt auf, dass der nach oben abgeführte Wärmestrom größer als der nach unten abgeführte Wärmestrom ist. Dies ist auf den asymmetrischen Aufbau des verwendeten Prüfstandes zurückzuführen. Teilabbildung b) stellt die mit den in Kapitel 3.2 erläuterten Temperatursensoren erfassten Temperaturen dar. In dunkelblau ist die sich im Inneren des Aktors bei  $r=0$  einstellende Temperatur, in grün die Temperatur, welche sich an der Oberfläche nahe der radialen Bohrung einstellt, dargestellt (siehe Abbildung 3.2 b)). Die Oberflächentemperatur nahe der Bohrung liegt bei einer Verlustleistung von 15 Watt um ca. 9 °C unter der Kerntemperatur. Die rote Linie entspricht der mit dem unteren PT-1000 Widerstandsthermometer (siehe Abbildung 3.2 b)) erfassten Temperatur. Diese liegt bis zu 35 °C unter der Kerntemperatur. Die hellblaue Linie zeigt die Temperatur des unteren Wärmestromsensors. Der Abstand des im

Wärmestromsensor integrierten Temperatursensors zur Aktoraufstandsfläche beträgt in etwa 1 mm. Diese Temperatur ist um bis zu 98 °C niedriger als die Kerntemperatur. Der axiale Temperaturgradient ist also deutlich stärker ausgeprägt als der radiale. Weitere Messergebnisse für die Aktoren aus PIC 151 und PIC 181 finden sich im Anhang B.1.

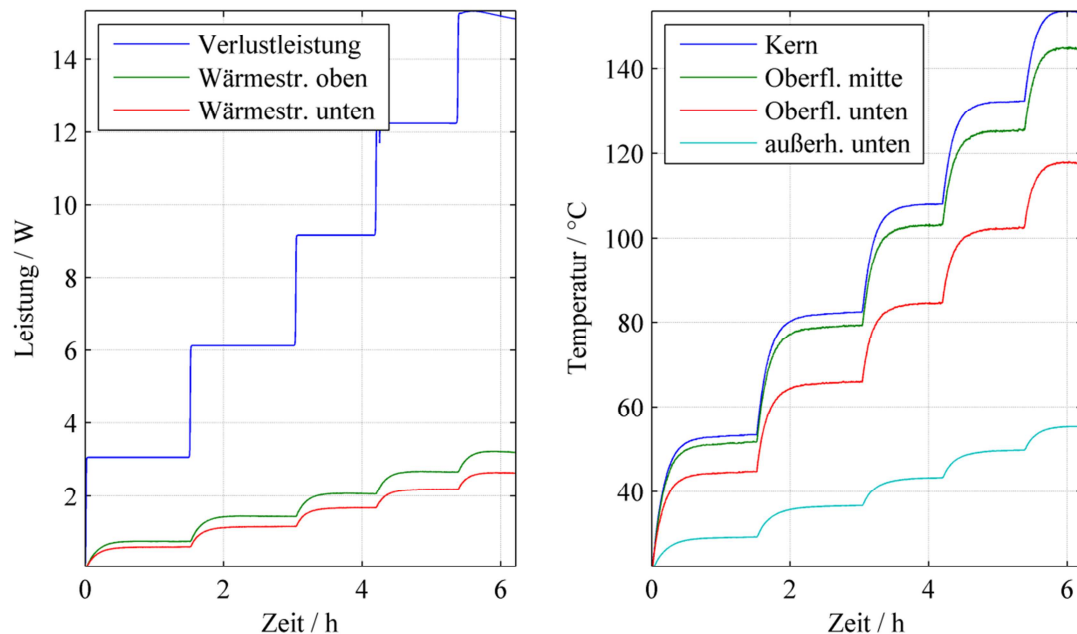


Abbildung 4.19 a) Zugeführte Wärme und Wärmeströme über die Aktoraufstandsflächen b) Ausgewählte Temperaturen (PIC 255).

Eine Auswertung der Energiebilanz im stationären Zustand ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Dieser Zustand ist dadurch charakterisiert, dass die zugeführte und die abgeführte Energie identisch sind. Je nach Heizleistung werden 38 bis 45 % der Energie über die axialen Kontaktflächen abgeführt. Die restlichen 55 bis 62 % werden über die Mantelflächen transferiert. Die Abhängigkeit der Aufteilung von der Heizleistung ist plausibel, da mit höheren Heizleistungen höhere Oberflächentemperaturen einhergehen. Für diese ist der Wärmeaustausch durch freie Konvektion und Strahlung effektiver. Dennoch ist der hohe Anteil des axialen Wärmestromes bemerkenswert, da die Fläche der axialen Aufstandsflächen nur etwa 21 % der äußeren Zylinderfläche entspricht. Für abweichende Aktorgeometrien ergeben sich naturgemäß abweichende Aufteilungen. Jedoch ist davon auszugehen, dass die axiale Wärmeabfuhr auch bei langgestreckten Aktoren stets einen wesentlichen Beitrag zur Wärmebilanz leistet.



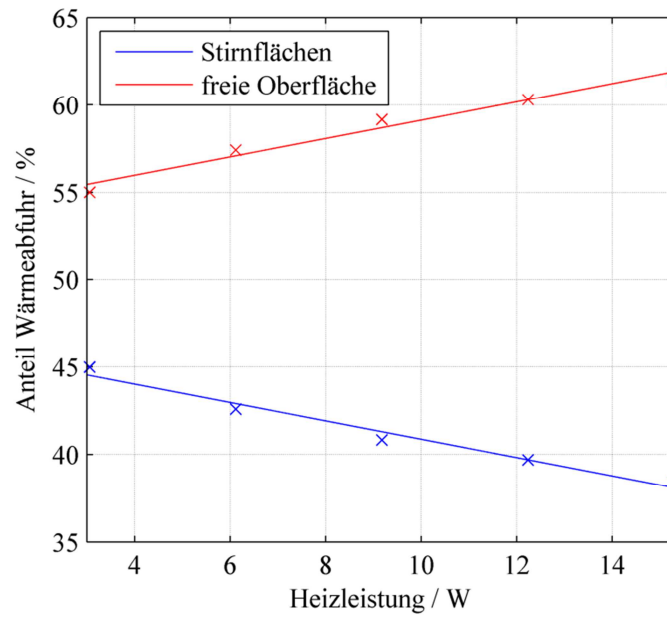


Abbildung 4.20 Aufteilung der Wärmeabfuhr im stationären Zustand in Abhängigkeit von der zugeführten Heizleistung.



---

## 5 Modellbildung des Stapelaktors

---

Basierend auf den experimentellen Beobachtungen wird nun ein Aktormodell abgeleitet, welches die für aktive Schwingungsbeeinflussung wesentlichen Effekte abbildet. Kapitel 5.1 befasst sich mit dem piezoelektrischen Modellteil, welcher bereits in [163] vorgestellt wurde. Kapitel 5.2 erläutert den thermischen Modellteil.

---

### 5.1 Piezoelektrisches Aktormodell

---

Zunächst wird entschieden, welche der in Kapitel 2.6 vorgestellten, für Stapelaktoren charakteristischen, Effekte im Hinblick auf Anwendungen der aktiven Schwingungsbeeinflussung relevant sind. Im Anschluss wird schrittweise ein piezoelektrisches Aktormodell hergeleitet.

---

#### 5.1.1 Definition der Modellanforderungen

---

Bei Anwendungen der aktiven Schwingungsbeeinflussung werden die Aktoren typischerweise mechanisch vorgespannt. Dies ist notwendig um Zugspannungen im Aktormaterial zu vermeiden, welche sowohl die Keramik als auch die Klebeschicht schädigen. Für dynamische Anwendungen wird seitens der Aktorhersteller eine Vorlast von 15 MPa empfohlen [42]. Um diese Vorspannung zu realisieren, bieten sich relativ zur Aktorsteifigkeit gesehen weiche mechanische Federn an [16], [164]. Diese müssen mit einem in Verhältnis zur Aktorauslenkung großen Weg vorgespannt werden, um die gewünschte Vorspannkraft zu erreichen. Deshalb bleibt die Federkraft bei einer Auslenkung oder Kontraktion des Aktors nahezu konstant. Außerdem werden die Aktoren nur unipolar betrieben, so dass sich lediglich Druckkräfte erzeugen lassen. Für aktive Schwingungsbeeinflussung werden jedoch sowohl Druck- als auch Zugkräfte benötigt. Deshalb werden die Aktoren mit einem statischen elektrischen Feld beaufschlagt. Dieses wird typischerweise auf 50 % der maximal zulässigen elektrischen Feldstärke festgelegt. In Verbindung mit den Vorspannfedern lassen sich so relativ zur statischen Vorspannkraft betrachtet in gleichem Maße sowohl Zug- als auch Druckkräfte erzeugen. Dem statischen elektrischen Feld wird anschließend zum Erzeugen der gewünschten Kräfte ein dynamischer Anteil überlagert. Somit oszilliert das elektrische Feld um einen statischen Mittelwert. Das niederfrequente Kriechen folgt überwiegend diesem statischen Mittelwert. Somit längt sich der Aktor einmalig nach dem Start des aktiven Systems bis ein stationärer Zustand erreicht ist. Das dynamische Verhalten des Aktors wird vom niederfrequenten Kriechverhalten jedoch kaum beeinflusst. Deshalb kann auf die Modellierung des niederfrequenten Kriechens verzichtet werden. Läge der Fokus dieser Arbeit z. B. auf Nanopositionieraufgaben, welche durch überwiegend statische Signalanteile charakterisiert sind, würde eine Vernachlässigung des Kriechens nur zu unzureichenden Ergebnissen führen. Die Frequenzabhängigkeit des Materials im höheren Frequenzbereich wird ebenfalls vernachlässigt. Diese ist nur von Relevanz, wenn sehr breitbandige Signale auf den Aktor gegeben werden. Bei

---

aktiven Schwingungsminderungsaufgaben wird die Signalfrequenz durch die dominanten Eigenfrequenzen der zu regelnden mechanischen Strecke bestimmt. Die mechanischen Systeme, welche mit Stapelaktoren sinnvoll beeinflusst werden können, weisen in der Regel ihre dominanten Eigenfrequenzen im Bereich von einigen wenigen Hertz bis hin zu wenigen hundert Hertz auf. In einem solchen beschränkten Frequenzband spielt die Frequenzabhängigkeit, wie Abbildung 2.7 unterstreicht, nur eine untergeordnete Rolle. Dies gilt insbesondere, wenn die Frequenz, bei welcher die Parameter für das Aktormodell identifiziert werden, in die Mitte des relevanten Frequenzbereichs gelegt wird. Dann führt eine Vernachlässigung der Frequenzabhängigkeit nur zu geringen Modellierungsfehlern.

Wie oben erwähnt werden die Aktoren typischerweise mit einer statischen Last vorgespannt. Diese Vorspannung ist für eine Einbausituation charakteristisch und ändert sich während des Betriebes nicht. In unterschiedlichen Einbausituationen können jedoch durchaus unterschiedliche Vorspannungen technisch sinnvoll sein. Somit ist eine direkte Berücksichtigung der Vorspannungsabhängigkeit im Aktormodell nicht notwendig. Ist dennoch die Abbildung unterschiedlicher Vorspannungen erwünscht, sollte dies durch individuelle Parametersätze möglich sein.

Anders sieht es bei der Temperaturabhängigkeit des Aktorverhaltens aus, da sich die Aktortemperatur im Betrieb aufgrund der Eigenerwärmung des Aktors, eine entsprechendes dynamisches elektrisches Feld vorausgesetzt, ständig ändert. Somit muss dieser Effekt direkt vom Modell berücksichtigt werden.

Ebenfalls von großer Bedeutung ist die Aktorhysterese. Diese stellt die wesentliche Nichtlinearität eines Stapelaktors dar und hat somit direkte Auswirkungen auf die Reglerleistungsfähigkeit und Stabilität. Des Weiteren ist die Hysterese die Ursache für die Eigenerwärmung, so dass diese ebenfalls direkt vom Modell berücksichtigt werden muss.

Darüber hinaus können bei Aufgaben der aktiven Schwingungsbeeinflussung hohe dynamische Lasten auftreten, welche wiederum große Kräfte mit sich bringen. Diese Kräfte reduzieren die Aktorauslenkung deutlich. Somit muss auch das lastabhängige Verhalten des Aktors abgebildet werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Modell das last- und temperaturabhängige Verhalten sowie die wesentlichen Aktorhystereseeffekte abbilden muss. Zeitliche Effekte sowie die Vorspannungsabhängigkeit spielen nur einer untergeordnete Rolle und können vernachlässigt, beziehungsweise durch unterschiedliche Parametersätze abgebildet werden.

---

### 5.1.2 Modellierungsansatz

---

Einen guten Ausgangspunkt für die Modellierung des Aktorverhaltens bieten die aus dem thermodynamischen Potential abgeleiteten linearen Grundgleichungen (2.33) bis (2.35). Diese enthalten neben den elektromechanischen Wechselwirkungen auch pyroelektrische sowie thermoelastische Effekte. Sowohl der pyroelektrische als auch der thermoelastische Effekt sind für die aktive Schwingungsminderung unbedeutend. Der Hauptgrund hierfür ist, dass die

Temperaturänderungen des Aktors im Vergleich zum angelegten elektrischen Feld sehr langsam verlaufen.

Die thermische Dehnung des Aktors wird in der Regel von der oben erläuterten mechanischen Vorspanneinrichtung aufgenommen, so dass keine zusätzlichen thermisch induzierten mechanischen Spannungen entstehen. Solange also die Einhaltung einer absoluten Position nicht von Bedeutung ist, ist die thermische Dehnung des Aktors nicht modellrelevant. Werden spannungsgeregelte Verstärker verwendet, spielt auch der pyroelektrische Effekt keine Rolle. Dieser stellt aus regelungstechnischer Sicht eine Störung auf den Spannungsregelkreis dar, welche von diesem, eine geeignete Reglerauslegung vorausgesetzt, zeitnah kompensiert wird. Diese Kompensation erfolgt in der Regel nahezu perfekt, da die Temperaturänderungsgeschwindigkeit wie oben erwähnt sehr niedrig ist. Die beiden letzten Terme von Gleichung (2.33) wurde bereits in Kapitel 2.2 als unbedeutend klassifiziert. Somit ergeben sich unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Modellparameter die folgenden Gleichungen zur Modellierung des linearen Aktorverhaltens:

$$\Delta\sigma = \frac{\rho c^{E,T}}{\Theta} \Delta\theta, \quad (5.1)$$

$$D_3 = d_{33(\Theta, T_0)} T_3 + \epsilon_{3(\Theta, T_0)} E_3, \quad (5.2)$$

$$S_3 = s_{33(\Theta, T_0)} T_3 + d_{33(\Theta, T_0)} E_3. \quad (5.3)$$

Im Weiteren wird Gleichung (5.1) durch das thermische Aktormodell ersetzt, welches in Kapitel 5.2 genauer erläutert wird. Die Gleichungen (5.2) und (5.3) bilden das temperatur- und lastabhängige Verhalten des Aktors bereits grundlegend ab. Als lineare Modellparameter bieten sich sowohl die in Kapitel 4.1 dargestellten linearen Kleinsignalparameter als auch die linearen Großsignalparameter aus Kapitel 4.2.1 an. Ein Vergleich der beiden Varianten erfolgt in Kapitel 8.1.2. Im folgenden Abschnitt wird das Modell zunächst um die nichtlinearen Hystereseeffekte erweitert.

---

### 5.1.3 Erweiterung des piezoelektrischen Aktormodells um nichtlineare Effekte

---

Die Erweiterung des Modells erfolgt zunächst bei konstanter Temperatur. In Abschnitt 5.1.4 wird dann zusätzlich der Temperatureinfluss ergänzt. Um die nichtlinearen Effekte zu berücksichtigen, wird die von Bassiouny und Maugin in ihrer Artikelserie [82], [83], [165], [166] vorgeschlagene Aufspaltung der gesamten elektrischen Flussdichte  $D_3$  und der Gesamtdehnung  $S_3$  in einen reversiblen, linearen und einen irreversiblen, nichtlinearen Teil angewendet. Es gilt

$$D_3 = D_{3,lin} + D_{3,nl} \quad (5.4)$$

und

$$S_3 = S_{3,lin} + S_{3,nl}, \quad (5.5)$$

wobei die linearen Anteile bereits durch (5.2) und (5.3) bekannt sind. Somit findet sich

$$D_3 = d_{33(T_0)} T_3 + \epsilon_{3(T_0)} E_3 + D_{3,nl(E)} \quad (5.6)$$

und

$$S_3 = s_{33(T_0)} T_3 + d_{33(T_0)} E_3 + S_{3,nl(E)}. \quad (5.7)$$

Der nichtlineare Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl}$  wird nun, wie von Hegewald [81], [130] vorgeschlagen, mit Hilfe des klassischen Preisach-Hysteresemodells (CPM) modelliert. Für den nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl}$  ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (2.46)

$$D_{3,nl(E)} = \iint_T \mu_{D_{3,nl}(\alpha,\beta)} \gamma_{\alpha\beta} E_{(\tau)} d\alpha d\beta. \quad (5.8)$$

Dabei nutzt man aus, dass die wesentlichen Hystereseeffekte nur in Abhängigkeit des elektrischen Feldes  $E$  und nicht in Abhängigkeit der mechanischen Spannung  $T$  auftreten (siehe Kapitel 2.6). Somit reicht das CPM, welches nur über einen Eingang und einen Ausgang (SI-SO) verfügt, zur Modellierung der Hysterese aus. Prinzipiell ist es möglich auch den nichtlinearen Anteil der Dehnung  $S_{nl(E)}$  mit einem weiteren CPM abzubilden. Dies verdoppelt jedoch den Berechnungsaufwand und ist somit nicht empfehlenswert. Auch für diese Problemstellung macht Hegewald einen Lösungsvorschlag [81]. Er nimmt an, dass der nichtlineare Anteil der Dehnung  $S_{3,nl(E)}$  eine Funktion des nichtlinearen Anteils der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  ist. Diese Annahme lässt sich physikalisch nicht unmittelbar beweisen. Sie ist aber durchaus physikalisch motiviert, da, wie in Kapitel 2.4 erläutert, die Aktordehnung eine Folge der Polarisationsänderung ist. Deshalb schlägt Hegewald einen Polynomansatz vor, mit welchem man aus dem nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  den nichtlinearen Anteil der Dehnung  $S_{3,nl(E)}$  berechnen kann. Eine Polynomordnung von vier hat sich als Zweckmäßig erwiesen. So ergibt sich

$$S_{3,nl(E)} = k_1 D_{3,nl(E)}^4 + k_2 D_{3,nl(E)}^3 + k_3 D_{3,nl(E)}^2 + k_4 D_{3,nl(E)} + k_5 \quad (5.9)$$

für den nichtlinearen Teil der Aktordehnung. Das elektromechanische Verhalten ist nun abgebildet. Es fehlt aber noch ein geeigneter Ausdruck zur Beschreibung der die Eigenerwärmung des Aktors verursachenden Verluste.

Wie in Kapitel 2.10 erläutert, geht die Eigenerwärmung der Aktoren im hier betrachteten Frequenzbereich überwiegend auf dielektrische und piezoelektrische Verluste zurück, welche sich in der  $D - E$  Hysterese widerspiegeln [20],[21].

Die  $D - E$  Hysterese wird, wie oben erläutert, mit dem CPM abgebildet. Aufgrund der in Kapitel 2.9 erläuterten Eigenschaften des CPM lassen sich die mit der modellierten Hysterese verbundenen Verluste direkt berechnen. Die Vorgehensweise sei an dieser Stelle zur besseren Nachvollziehbarkeit noch einmal kurz wiederholt. Zunächst wird mit Gleichung (2.52), beziehungsweise numerisch effizienter mit den äquivalenten Gleichungen (2.53) und (2.54), die mit dem momentanen

Schaltzustand der Hysterone verbundene Verlustarbeit  $Q_{D(\Omega)}$  berechnet. Die Verlustarbeit  $Q_{D(\Omega)}$  würde dann verrichtet werden, wenn das momentan anliegende elektrische Feld kontinuierlich auf 0 V/mm zurückgefahren werden würde. Dabei muss das Gebiet  $\Omega$  alle aktivierten Hysterone einschließen ( $\Omega = S_+$ ). Wie in Abschnitt 2.9 erläutert, entspricht der Betrag der zeitlichen Ableitung von  $Q_{D(\Omega)}$  der hysteresebedingten beziehungsweise der durch dielektrische, elastische und piezoelektrische Verluste hervorgerufenen Verlustleistung. Bei der ermittelten Verlustleistung handelt es sich um eine spezifische Verlustleistung, so dass zum Ermitteln der absoluten Verluste noch mit dem vom elektrischen Feld  $E$  aktivierten Keramikvolumen  $V_{eff}$  multipliziert werden muss. Somit findet sich für die die Eigenerwärmung hervorrufoende Aktoerverlustleistung

$$\dot{Q}_{g(\tau)} = V_{eff} \left| \frac{\partial Q_{D(S_+)}}{\partial \tau} \right|. \quad (5.10)$$

Da die Aktoren unterhalb ihrer Resonanzfrequenz betrieben werden, darf davon ausgegangen werden, dass die Verluste gleichmäßig über dem Keramikvolumen verteilt auftreten [135]. Somit kann  $\dot{Q}_{g(\tau)}$  als Eingangsgröße für das thermische Aktormodell verwendet werden.

Das piezoelektrische Modell ist nun für konstante Temperaturen vollständig definiert. Im Anschluss wird das Modell um den Temperatureinfluss erweitert.

---

#### 5.1.4 Erweiterung des Modells um die Temperaturabhängigkeit

---

Um die Temperaturabhängigkeit des Aktoerverhaltens in das Modell zu integrieren, werden zwei Ansätze verfolgt. Beim ersten Modellansatz werden zwei für konstante Temperaturen ermittelte Aktormodelle überblendet, beim zweiten Ansatz wird die Temperaturabhängigkeit direkt in das Akto- beziehungsweise Preisach-Modell integriert.

Der Überblendungsansatz ist schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt. Zu jedem Zeitpunkt werden zwei temperaturunabhängige, vollständige Aktormodelle gerechnet, welche in Abhängigkeit der momentanen mittleren Aktoortemperatur  $\Theta_{avg}$  überblendet werden. Dieses Vorgehen lässt sich als Fuzzy-Gain-Scheduling interpretieren [167]. Eines der Modelle ist für die nächst höhere experimentell untersuchte bzw. modellierte Temperatur  $\Theta_i$  parametrisiert und das andere für die nächst niedrigere Temperatur  $\Theta_j$ . Beide Modelle werden mit identischen Eingangssignalen beaufschlagt. Die Überblendung erfolgt mittels der linearen Gewichtsfunktionen

$$w_1 = \frac{\Theta_{avg} - \Theta_j}{\Theta_i - \Theta_j} \quad (5.11)$$

und

$$w_2 = 1 - w_1. \quad (5.12)$$

Die Aktoerdehnung  $S_{(\Theta_{avg})}$  für die mittlere Aktoortemperatur  $\Theta_{avg}$  berechnet sich mit Hilfe dieser Gewichtungsfunktionen und den Ergebnissen der temperaturunabhängigen Teilmodelle zu

$$S_{(\Theta_{avg})} = w_1 S_{\Theta i} + w_2 S_{\Theta j}. \quad (5.13)$$

Analog findet sich für die elektrische Flussdichte

$$D_{(\Theta_{avg})} = w_1 D_{\Theta i} + w_2 D_{\Theta j} \quad (5.14)$$

und für die Verlustleistung

$$\dot{q}_{(\Theta_{avg})} = w_1 \dot{q}_{\Theta i} + w_2 \dot{q}_{\Theta j}. \quad (5.15)$$

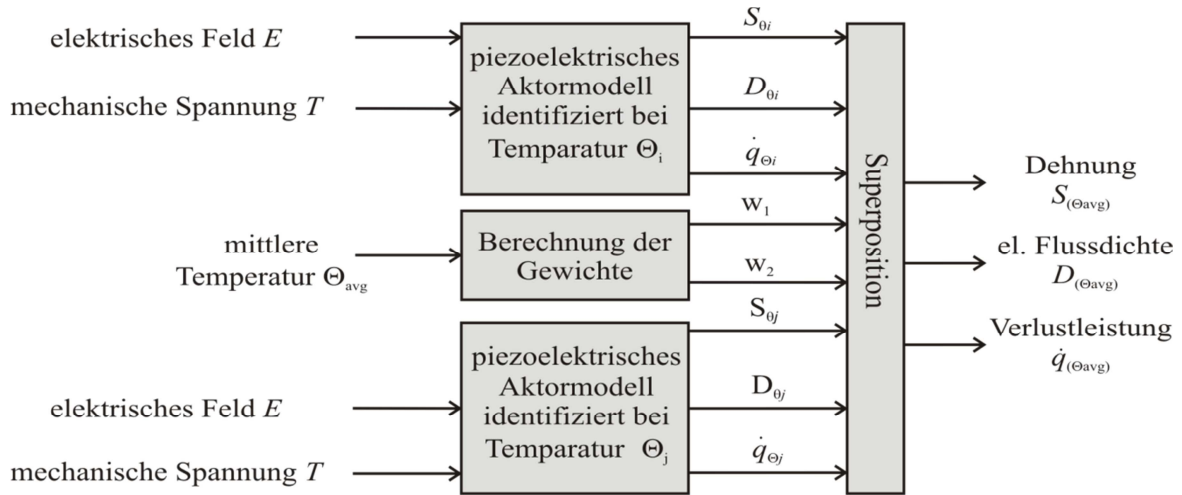


Abbildung 5.1 Schematische Darstellung des zur Modellierung der Temperaturabhängigkeit verwendeten Superpositionsansatzes.

Die soeben erläuterte Methodik ist hinsichtlich des Berechnungsaufwandes nicht optimal, da zwei Modelle berechnet werden müssen. Deshalb wird nun eine zweite Möglichkeit zur Modellierung der Temperaturabhängigkeit erläutert, bei welcher die nichtlinearen Modellgleichungen als temperaturabhängig angenommen werden:

$$D_3 = d_{33(T_0, \Theta)} T_3 + \epsilon_{3(T_0, \Theta)} E_3 + D_{3, nl(E, \Theta)} \quad (5.16)$$

und

$$S_3 = s_{33(T_0, \Theta)} T_3 + d_{33(T_0, \Theta)} E_3 + S_{3, nl(E, \Theta)}. \quad (5.17)$$

Die temperaturabhängigen Parameter  $s_{33(T_0, \Theta)}$ ,  $d_{33(T_0, \Theta)}$  und  $\epsilon_{3(T_0, \Theta)}$  lassen sich aus den in Kapitel 4 dargestellten, für unterschiedliche konstante Temperaturen ermittelten linearen Parametern mit Hilfe von Interpolationsfunktionen ermitteln. Um die Temperaturabhängigkeit des nichtlinearen Anteils der elektrischen Flussdichte  $D_{3, nl(E, \Theta)}$  abzubilden, wird eine temperaturabhängige Preisachdichtefunktion  $\mu_{D_{3, nl}(\alpha, \beta, \Theta)}$  angenommen. Mit dieser ergibt sich für den nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3, nl(E, \Theta)}$

$$D_{3, nl(E, \Theta)} = \iint_T \mu_{D_{3, nl}(\alpha, \beta, \Theta)} \gamma_{\alpha\beta} E_{(\tau)} d\alpha d\beta. \quad (5.18)$$

Auch für Gleichung (5.18) lässt sich analog zu Gleichung (2.48) eine doppelintegralfreie Form finden, welche hier exemplarisch für ein ansteigendes Eingangssignal dargestellt ist

$$D_{3,nl(E,\Theta)} = -F_{(E_{max},E_{min},\Theta_{avg})} + 2 \sum_{k=1}^{n_{(\tau)}-1} (F_{(M_k,m_{k-1},\Theta_{avg})} - F_{(M_k,m_k,\Theta_{avg})}) + 2F_{(E_{(\tau)},m_{n_{(\tau)}-1},\Theta_{avg})}. \quad (5.19)$$

Die Integralwerte  $F_{(\alpha,\beta,\Theta_{avg})}$  über Teildreiecksflächen sind gegeben durch

$$F_{(\alpha,\beta,\Theta_{avg})} = \iint_{T_{(\alpha,\beta)}} \mu_{(\alpha,\beta,\Theta_{avg})} d\alpha d\beta. \quad (5.20)$$

Diese lassen sich mit dem in Kapitel 6.1.3 vorgestellten Verfahren lediglich für unterschiedliche diskrete Temperaturen  $\Theta_k$  ermitteln. Um einen kontinuierlichen Verlauf zu erhalten, wird erneut ein Interpolationsansatz verwendet.

Die mit der Fläche  $S_+$  verbundene Verlustarbeit  $Q_{S_+(\Theta_{avg},E)}$  ist nach [35] gegeben durch

$$Q_{S_+(\Theta_{avg},E)} = \iint_{\Omega} \left( \int_{\beta}^{\alpha} \mu_{(\alpha,\beta,\Theta_{avg})} d\Theta_{avg} \right) d\alpha d\beta. \quad (5.21)$$

Die Änderungsrate des elektrischen Feldes  $\dot{E}$  ist im dynamischen Aktorbetrieb jedoch stets sehr viel größer als die Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{\Theta}_{avg}$  der mittleren Aktortemperatur. Unter Verwendung dieser Annahme lässt sich (5.21) näherungsweise vereinfachen zu

$$Q_{S_+(\Theta_{avg},E)} \approx \iint_{\Omega} \mu_{(\alpha,\beta,\Theta)} (\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \quad (5.22)$$

Dies entspricht der für konstante Temperatur gefundenen Beziehung, so dass die in Kapitel 2.9 beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung der Aktorverluste angewendet werden kann. Der nichtlineare Anteil der Aktordehnung  $S_{nl(E,\Theta_{avg})}$  wird analog zu Gleichung (5.9) mit einem Polynomansatz abgebildet, wobei jetzt die Polynomkoeffizienten  $k_i$  temperaturabhängig sind:

$$S_{nl(E,\Theta_{avg})} = k_{1(\Theta_{avg})} D_{3,nl(E)}^4 + k_{2(\Theta_{avg})} D_{3,nl(E)}^3 + k_{3(\Theta_{avg})} D_{3,nl(E)}^2 + k_{4(\Theta_{avg})} D_{3,nl(E)} + k_{5(\Theta_{avg})}. \quad (5.23)$$

Die Polynomkoeffizienten werden wiederum durch Interpolation aus den für konstante Temperaturen ermittelten Werten berechnet.

Somit sind beide Ansätze zur Abbildung der Tempertauabhängigkeit vollständig definiert. Sie werden in Kapitel 8.1.1 gegenübergestellt.

## 5.2 Thermisches Aktormodell

Die wesentliche Aufgabe des thermischen Aktormodells ist die Berechnung der mittleren Aktortemperatur, welche als Eingangsgröße für den piezoelektrischen Teil des Modells benötigt wird. Die einfachste Möglichkeit zum Modellieren des Aktors ist, wie bereits erwähnt, ein Punktmassenmodell. Dieses liefert mit minimalem Rechenaufwand die mittlere Aktortemperatur.



Bei der realen Anwendung treten jedoch lokale Temperaturüberhöhungen im Zentrum des Aktors auf. Folglich liegt die Temperatur im Zentrum des Aktors oberhalb und an den axialen Endscheiben unterhalb der mittleren Temperatur. Die erhöhten Temperaturen führen zu einer lokalen Schädigung, welche in Abbildung 5.2 dargestellt sind. Teilabbildung a) zeigt einen werksneuen Aktor. Teilabbildung b) stellt einen noch funktionsfähigen Aktor dar, welcher sich im dynamischen Betrieb aufgrund der Aktorverluste lokal auf ca. 150 °C erwärmt hat. In den ehemals heißen Zonen im Zentrum zeigen sich an den positiven Elektroden deutliche Verdunklungen. An den im Betrieb kühleren axialen Aktorenden treten keine solchen Verdunklungen auf. Teilabbildung c) zeigt einen defekten Aktor bei welchem es durch die erhöhte Aktortemperatur zu elektrischen Überschlüssen kam [22]. Bei diesem ist der komplette zentrale Bereich dunkel verfärbt. Daraus lässt sich schließen, dass die dunkle Verfärbung in direktem Zusammenhang mit dem Aktorversagen steht.

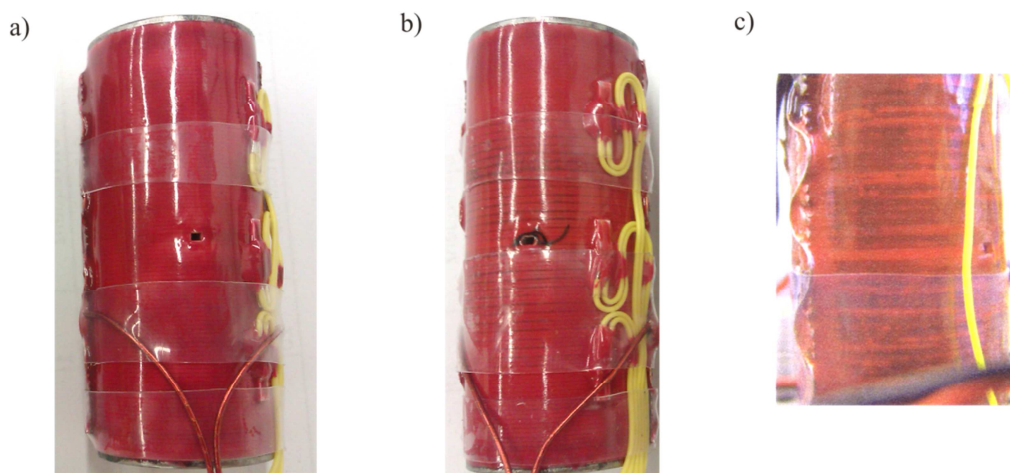


Abbildung 5.2 Vergleich eines werksneuen Aktors ( a ) mit einem benutzten ( b ) und einem defekten Aktor ( c ) [22].

Tritt an einer Stelle des Aktors ein elektrischer Kurzschluss auf, wird der gesamte Aktor aufgrund der Parallelschaltung aller positiven und negativen Elektroden unbrauchbar, da sich kein elektrisches Feld mehr aufbauen lässt. Daraus folgt, dass eine kritische Temperatur an keiner Stelle des Aktors überschritten werden darf. Somit reicht die Berechnung der mittleren Aktortemperatur zum Nachweis eines sicheren Aktorbetriebes nicht aus.

Deshalb wird in dieser Arbeit zu Berechnung der Aktortemperatur ein auf der Fourierschen Wärmeleitgleichung basierendes thermisches Aktormodell untersucht.

Die vermessenen Aktoren sind allesamt zylinderförmig und es liegt keine seitliche Anströmung vor, so dass sich eine rotationssymmetrische Temperaturverteilung innerhalb des Aktors ergibt. Deshalb kann die Temperaturänderung in Umfangsrichtung  $\varphi$  vernachlässigt werden. Gleichung (2.76) vereinfacht sich somit zu

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\rho c} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (5.24)$$



Eine weitere Vereinfachung der Gleichung ist nicht sinnvoll, da sowohl der radiale als auch der axiale Wärmefluss bei den hier untersuchten Aktoren von Bedeutung sind. Weitere Details zur praktischen Umsetzung des thermischen Aktormodellteils in Matlab finden sich in Abschnitt 5.2.1. Um Gleichung (5.24) zu lösen, werden geeignete Randbedingungen benötigt. Der Wärmetransport über die radiale Mantelfläche des Aktors lässt sich durch eine Cauchy Randbedingung beschreiben. Konkret gilt für den Wärmestrom an der Aktoroberfläche in radialer Richtung

$$\dot{q}_r = \lambda_{ges,||} \frac{\partial \theta}{\partial r_{(r=r_a)}} = \alpha_{ges} (\theta_{surf(z)} - \theta_{amb}). \quad (5.25)$$

$\alpha_{ges}$  ist hierbei der Wärmeübergangskoeffizient, welcher sich z. B. über empirische Näherungsgleichungen berechnen lässt oder experimentell bestimmt werden kann.  $\theta_{surf(z)}$  beschreibt die Oberflächentemperatur und  $\theta_{amb}$  entspricht der Umgebungstemperatur. Diese Vorgehensweise bei der Modellierung des radialen Wärmestromes ermöglicht sowohl die Abbildung des konvektiven als auch eine näherungsweise Abbildung des Strahlungswärmeaustausches. Der Wärmefluss durch die Stirnseiten  $\dot{q}_z$  wurde, wie in Abschnitt 3.3 erläutert, messtechnisch erfasst. Dieser gemessene Wärmestrom kann direkt in Form einer Neumann Randbedingung verwendet werden. Es gilt

$$\dot{q}_{z(z=0,z=l)} = \lambda_{ges,\perp} \frac{\partial \theta}{\partial z_{(z=0,z=l)}}. \quad (5.26)$$

Im Allgemeinen ist der axiale Wärmestrom jedoch nicht bekannt. Dann lässt sich der axiale Wärmestrom näherungsweise durch einen thermischen Ersatzwiderstand  $R_{th}$  abbilden

$$\dot{q}_{z,R_{th}(z=0,z=l)} \approx \frac{1}{A_c R_{th}} (\theta_{end(r)} - \theta_{amb}). \quad (5.27)$$

In Gleichung (5.27) entspricht  $\theta_{end(r)}$  der Temperatur des Aktors an der Aufstandsfläche,  $\theta_{amb}$  der Umgebungstemperatur und  $A_c$  der Stirnfläche des Aktors. Alternativ kann das Aktormodell auch um ein Modell der näheren Umgebung erweitert werden. Aufgrund der zweidimensionalen Modellierung muss auch auf dem inneren Rand (bei  $r = 0$ ) des Berechnungsgebietes eine Randbedingung vorgegeben werden. Da es sich bei diesem um einen Symmetrierand handelt, gilt

$$\frac{\partial \theta}{\partial r_{(r=0)}} = 0. \quad (5.28)$$

Einen Überblick über die verwendeten Randbedingungen gibt Abbildung 5.3. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Verlustleistung des Aktors homogen auf das vom elektrischen Feld aktivierte Keramikvolumen verteilt wird. Dieses Volumen ist in Abbildung 5.3 durch eine Schraffur schematisch angedeutet. An den axialen Aktorenden sowie im Zentrum des Aktors befindet sich ein inaktiver Bereich, in welchem keine Verlustleistung generiert wird.

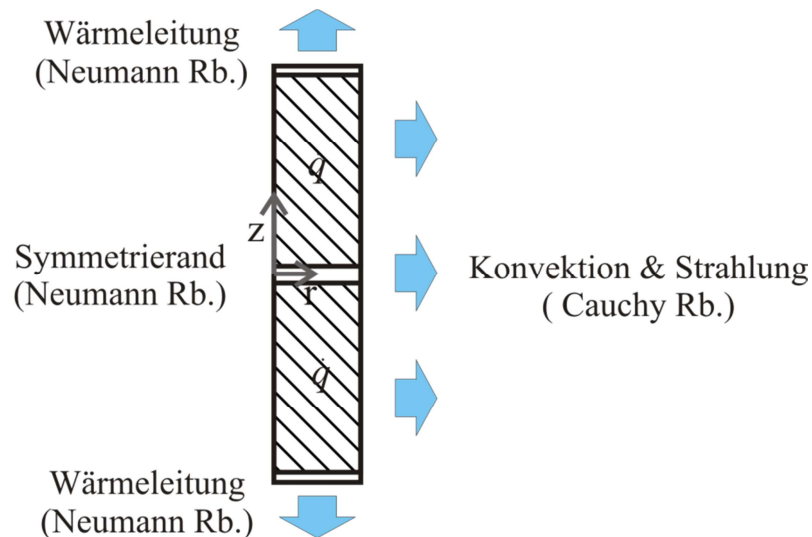


Abbildung 5.3 Übersicht über die verwendeten Randbedingungen des 2D-Modells.

Bei den untersuchten Hochvolt-Piezostapelaktoren handelt es sich um ein Laminat aus Keramik- und Elektrodenmaterial. Als Kleber kommt ein Epoxidharz zum Einsatz. Aus dem geschichteten Aufbau, welcher in Abbildung 5.4 a) schematisch dargestellt ist, ergeben sich unmittelbar besondere thermische Materialeigenschaften. Dies wird deutlich, wenn, wie in Abbildung 5.4 b) gezeigt, ein repräsentatives Teilstück, bestehend aus einer Elektrode und einer Keramikscheibe, gedanklich aus dem Aktor herausgelöst wird. Bei der Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit für dieses Teilstück ergibt sich, wie in Abbildung 5.4 c) dargestellt, parallel zur Elektrode eine Parallelschaltung von Wärmeleitwiderständen und senkrecht zur Elektrode eine Reihenschaltung. Somit ist unmittelbar klar, dass die Wärmeleitfähigkeit in radialer Richtung von der Wärmeleitfähigkeit in axialer Richtung abweicht.

Prinzipiell lässt sich der geschichtete Aufbau numerisch direkt berücksichtigen, indem die Geometrie des geschichteten Aufbaus in einer Finiten Element Software abgebildet und Materialdaten für Elektrode und Keramik hinterlegt werden. Jedoch benötigt eine solche Rechnung eine sehr feine Vernetzung, da die relativ dünne Elektrode (Elektrodenstärke ca.  $50\ \mu\text{m}$ ) durch das numerische Berechnungsgitter aufgelöst werden müsste. Dies führt zu einer hohen Knotenzahl, was insbesondere bei transienten Simulationen sehr lange Rechenzeiten bedeuten würde. Um eine gröbere Vernetzung zu ermöglichen, wird das Aktormaterial in dieser Arbeit deshalb gedanklich verschmiert, so dass ein homogenes Material entsteht. Um den geschichteten Aufbau dennoch zu berücksichtigen, wird davon ausgegangen, dass die Wärmeleitfähigkeit parallel zur Elektrodenrichtung  $\lambda_{ges,||}$  von der Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Elektrodenrichtung  $\lambda_{ges,\perp}$  abweicht. Dies wird als transversale Isotropie der Wärmeleitfähigkeit bezeichnet.

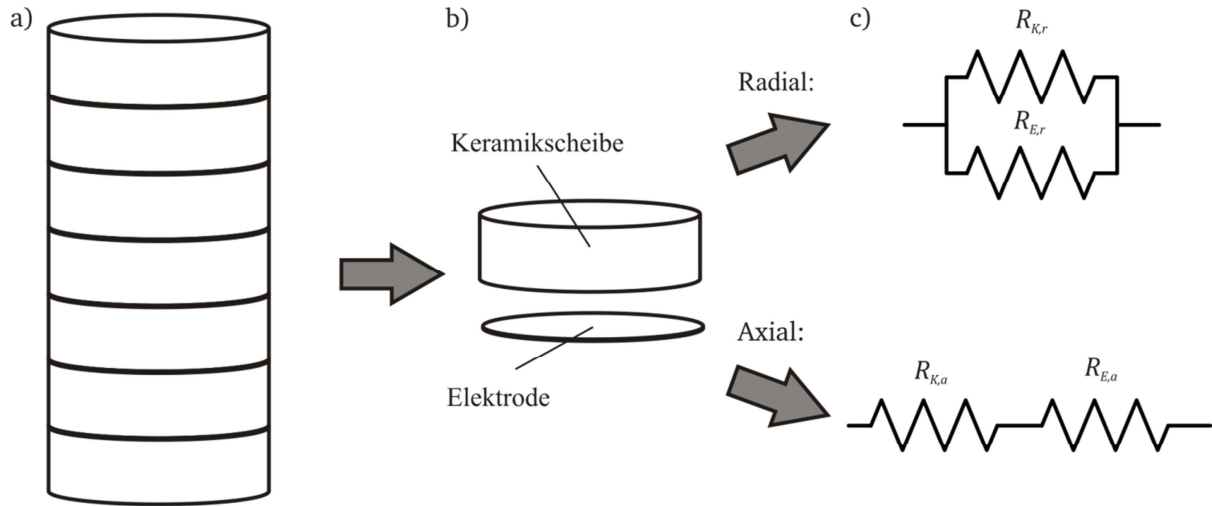


Abbildung 5.4 a) geschichteter Aufbau des Aktors b) repräsentative Teilelemente des Aktors c) Richtungsabhängige Abstraktion durch Wärmeleitwiderstände.

Die hier vorgeschlagene Modellstruktur lässt sich auf beliebige Aktorgeometrien anwenden, solange keine nicht rotationssymmetrische Temperaturverteilung auftritt. Dies schließt auch Ringaktoren mit ein, welche über eine zentrische, axiale Durchgangsbohrung verfügen. In einem solchen Fall muss die in Gleichung (5.28) festgelegte Symmetrierandbedingung jedoch durch eine weitere Cauchy Randbedingung ersetzt werden. Eine Störung der symmetrischen Temperaturverteilung kann z. B. dann auftreten, wenn der Aktor seitlich mit Luft angeströmt wird. Eine Anströmung in axialer Richtung hebt die Symmetrie jedoch nicht auf.

### 5.2.1 Umsetzung des thermischen Modells in Simulink

Wie oben erwähnt, erfolgt die Simulation des Aktorgesamtmodells in Matlab unter Verwendung der PDE-Toolbox und Simulink. Als Ergebnis der PDE-Toolbox ergibt sich ein lineares Differentialgleichungssystem vom Typ

$$M \frac{d\Theta}{d\tau} + K\Theta = F_l. \quad (5.29)$$

Die Massenmatrix  $M$  hängt von der Wärmekapazität des Aktors  $c$  sowie von der Dichte  $\rho$  des Aktormaterials ab

$$M = f_{(c,\rho)}. \quad (5.30)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $K$  ist von den Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{ges,||}$  und  $\lambda_{ges,\perp}$  sowie von den aufgeprägten Randbedingungen abhängig

$$K = f_{(\lambda_{ges,||}, \lambda_{ges,\perp}, Rb)}. \quad (5.31)$$

Lastvektor  $F_l$  hängt ebenfalls von den Randbedingungen sowie von der Aktorverlustleistung  $\dot{q}$  ab

$$F_l = f_{(q,Rb)}. \quad (5.32)$$

Für die Simulationen in Simulink wird von einer konstanten Dichte  $\rho$  und Wärmekapazität  $c$  sowie von konstanten Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{ges,||}$  und  $\lambda_{ges,\perp}$  ausgegangen. Dies führt zu einer konstanten Massenmatrix. Die Randbedingungen sowie die Verlustleistung des Aktors  $\dot{q}$  können jedoch nicht als konstant angenommen werden, da sie von der momentanen Aktortemperatur und vom angelegten elektrischen Feld abhängen. Dies führt dazu, dass sowohl der Lastvektor  $F$  als auch die Steifigkeitsmatrix  $K$  zeitlich veränderlich sind. Daraus resultiert, dass der Lastvektor in jedem Zeitschritt der Simulation neu aufgebaut werden muss. Ein vollständiger Neuaufbau der Steifigkeitsmatrix in jedem Zeitschritt ist jedoch nicht notwendig, da die aus der als konstant angenommenen Wärmeleitfähigkeiten herrührende Einträge der Steifigkeitsmatrix unveränderlich sind. Diese werden einmalig vorab mit Hilfe der PDE-Toolbox berechnet. Lediglich die Einträge der Steifigkeitsmatrix, welche von den variablen Randbedingungen abhängen, müssen in jedem Zeitschritt aktualisiert werden. Diese Aktualisierung wurde in Simulink in Form einer so genannten „Embedded-Matlab Function“ umgesetzt.

Zur Simulation wird das diskrete Aktormodell als ein Zustandsraumsystem [168] vom Typ

$$\dot{x} = A_{ss}x + B_{ss}u \quad (5.33)$$

und

$$y = C_{ss}x + D_{ss}u \quad (5.34)$$

aufgefasst. Aus Gleichung (5.29) folgt für die Systemmatrix  $A_{ss}$

$$A_{ss} = -M^{-1}K. \quad (5.35)$$

Die Eingangsmatrix  $B_{ss}$  ist bestimmt durch

$$B_{ss} = M^{-1}. \quad (5.36)$$

Eine Durchgangsmatrix  $D_{ss}$  entfällt, da das thermische Aktormodell nicht sprunghaft ist. Die Ausgangsmatrix  $C_{ss}$  wird so gewählt, dass sich direkt die mittlere Aktortemperatur als Ausgang des thermischen Aktormodells ergibt. Die mittlere Aktortemperatur ist definiert als

$$\Theta_{avg} = \frac{1}{V_{eff}} \iiint_V \Theta_{(r,\varphi,z)} r dr d\varphi dz = \frac{2\pi}{V_{eff}} \iint_A \Theta_{(r,z)} r dr df. \quad (5.37)$$

Das Flächenintegral in Gleichung (5.37) muss für die simulierten Temperaturen ausgewertet werden. Bei der Integration wird entsprechend der Philosophie der FEM elementweise vorgegangen. Für das Integral über ein beliebiges Element  $E$  gilt

$$\iint_E \Theta_{(r,z)} r dr dz = C_{E,i} \Theta_{E,i} \quad (5.38)$$

---

mit

$$C_{E,i} = \frac{J_e r_e}{6} [1 \quad 1 \quad 1]. \quad (5.39)$$

$C_{E,i}$  ergibt sich aus der analytischen Integration der Ansatzfunktionen des verwendeten linearen Dreieckselements auf einem Einheitsdreieck [149].  $J_e$  ist die Jacobideterminante der Transformation des betrachteten Elements auf das Einheitsdreieck,  $r_e$  entspricht dem mittleren Elementradius und  $\theta_{E,i}$  den Temperaturen der Elementknoten. Unter Verwendung einer Zuordnungsmatrix, welche die Knoten den einzelnen Elementen zuordnet, lässt sich aus den Elementbeiträgen der Ausgangsvektor  $C_{ss}$  erzeugen

$$\theta_{avg} = C_{ss,i} \theta_i. \quad (5.40)$$

So liefert das Zustandsraumssystem direkt die mittlere Aktortemperatur als Ausgangsgröße.



---

## 6 Identifikation der Modellparameter

---

Kapitel 6 erläutert wie die Parameter des Aktormodells bestimmt wurden. Abschnitt 6.1 befasst sich mit dem piezoelektrischen Teilmodell. Die Ermittlung der Parameter für das thermische Teilmodell erläutert Abschnitt 6.2.

---

### 6.1 Piezoelektrisches Teilmodell

---

In diesem Kapitel wird darauf eingegangen, wie die Messwerte aufbereitet und anschließend die Parameter des Preisach-Modells bestimmt wurden.

---

#### 6.1.1 Korrektur des niederfrequenten Kriechens

---

Alle Messwerte sind mit dem in Abschnitt 2.6.3 erläuterten Kriechverhalten überlagert, welches nicht vom CPM abgebildet werden kann und, wie bereits erläutert, vernachlässigt werden soll. Für die Parameteridentifikation werden die Messwerte deshalb in einem ersten Schritt vom Kriecheffekt bereinigt. So ist eine einfachere Parameteridentifikation für das klassische CPM möglich. Zur Identifikation wurden so genannte Mayergoyz Sequenzen verwendet, welche eine direkte Identifikation der Everett-Flächen  $F_{(\alpha,\beta)}$  aus den Messwerten ermöglichen. Die Messrohdaten einer solchen Messsequenz sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Teilabbildung a) zeigt das an den Aktor angelegte elektrische Feld, Teilabbildung b) die mit der Sawyer-Tower Schaltung gemessene Ladung und Teilabbildung c) das Signal des Wegsensors.

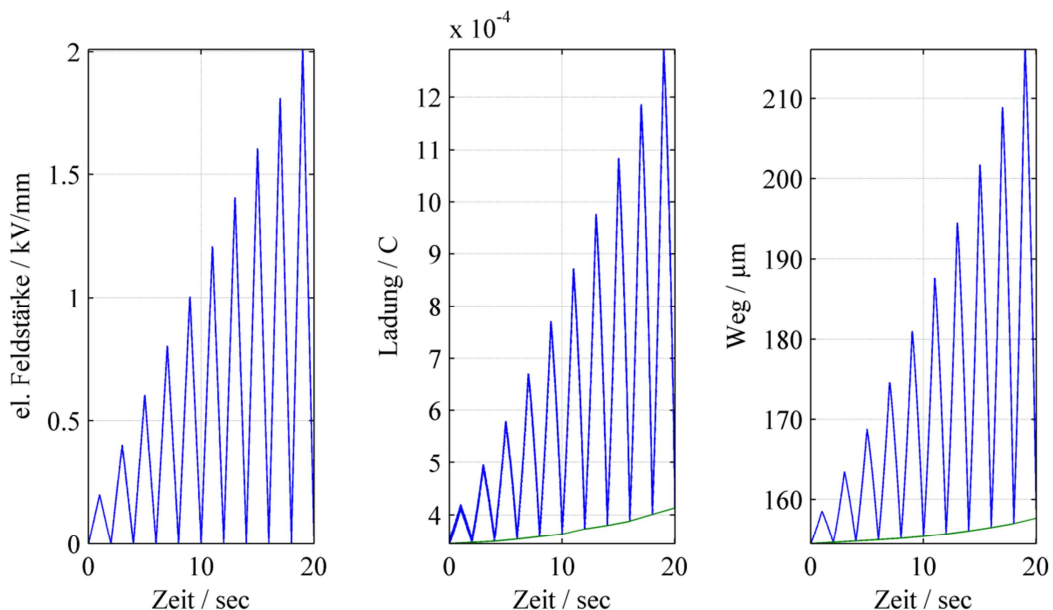


Abbildung 6.1 Messrohdaten einer zur Identifikation verwendeten Messreihe: a) am Prüfling angelegtes elektrisches Feld, b) gemessene Ladung, c) gemessenes Wegsignal.

Dabei ist das Signal des Wegsensors mit einem Offset behaftet, welcher zum einen auf die thermische Dehnung des Aktors, zum anderen auf die indirekte Messung der Aktordehnung über einen Abstandssensor zurückzuführen ist. Der Kriecheffluss zeigt sich dadurch, dass die gemessenen Signale Ladung und Weg nicht mehr auf ihren Ausgangswert zurückgehen, wenn das angelegte elektrische Feld auf null zurückgeht. Um nun die Messwerte vom Kriechen zu bereinigen, wird ein Polygonzug an die lokalen Minima der gemessenen Ladung und des gemessenen Weges angepasst. Dieser ist in den Teilabbildungen b) und c) von Abbildung 6.1 jeweils durch eine grüne Linie dargestellt. Durch Subtraktion des angepassten Polygonzugs von den Messwerten erhält man die vom Kriecheffekt bereinigten Signale. Diese sind in Abbildung 6.2 dargestellt.

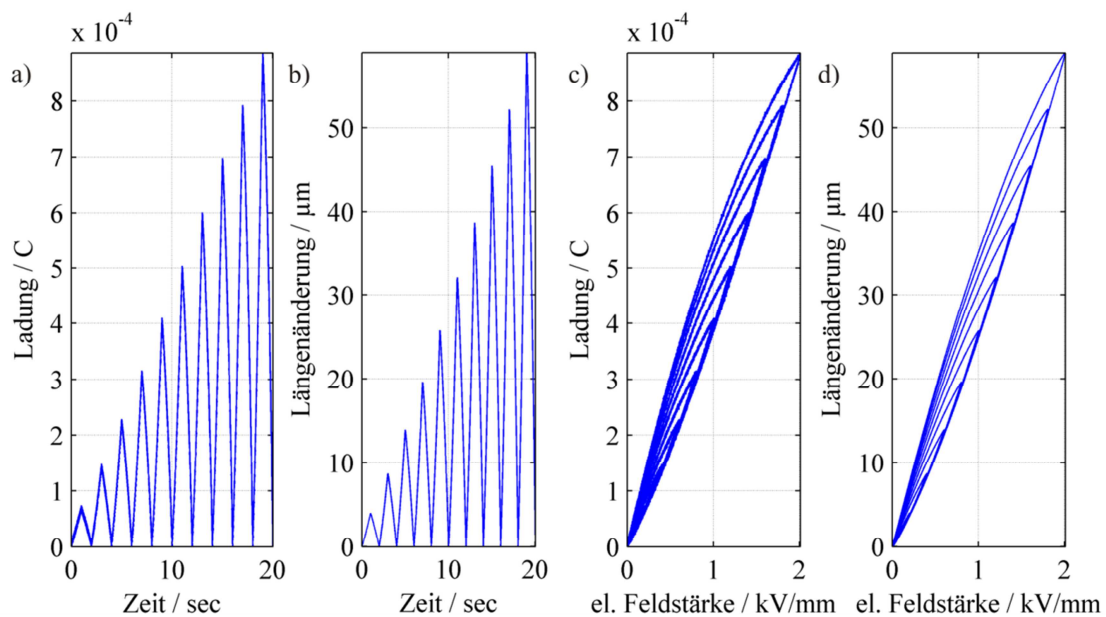


Abbildung 6.2 Vom Kriecheffekt bereinigte Messwerte: a) Ladung über Zeit, b) Längenänderung über Zeit, c) Ladung über elektrischer Feldstärke, d) Längenänderung über elektrische Feldstärke.

Als Ergebnis ergibt sich eine Hystereseschleife, welche sich sehr gut mit dem klassischen Preisach-Operator abbilden lässt.

Eine abweichende Vorgehensweise ergibt sich bei der Bestimmung der Ladung aus einer Strommessung. Um vom Strom auf die Ladung schließen zu können, muss der Strom über der Zeit integriert werden. Ist das Strommesssignal mit einem Offset behaftet, so entsteht ein Drift bei der ermittelten Ladung. Deshalb muss das Stromsignal vor der Integration vom Offset bereinigt werden. Dies lässt sich effizient durch Hochpassfiltern des Stromsignals erreichen. Strommessungen lassen sich bei den verwendeten Prüflingen erst ab Frequenzen von ca. 10 Hz mit zufriedenstellender Genauigkeit durchführen. Bei geringeren Frequenzen sind die gemessenen Ströme zu niedrig, so dass der Messfehler zu groß wird. In der Praxis hat sich ein Hochpassfilter erster Ordnung mit einer Eckfrequenz von 1 Hz als gut geeignet zur Filterung des Stromes erwiesen. Je niedriger die Amplitude des Stromsignals ist, desto mehr spielt das Messrauschen der Strommesszange eine Rolle. Deshalb kann es zusätzlich notwendig sein, das aus der gefilterten Strommessung ermittelte



Ladungssignal nachträglich nochmals mit der oben erwähnten Polygonzugmethode zu korrigieren. Hierbei wird dann jedoch nicht das Kriechen des Aktors, sondern der Messfehler der Strommesszange kompensiert.

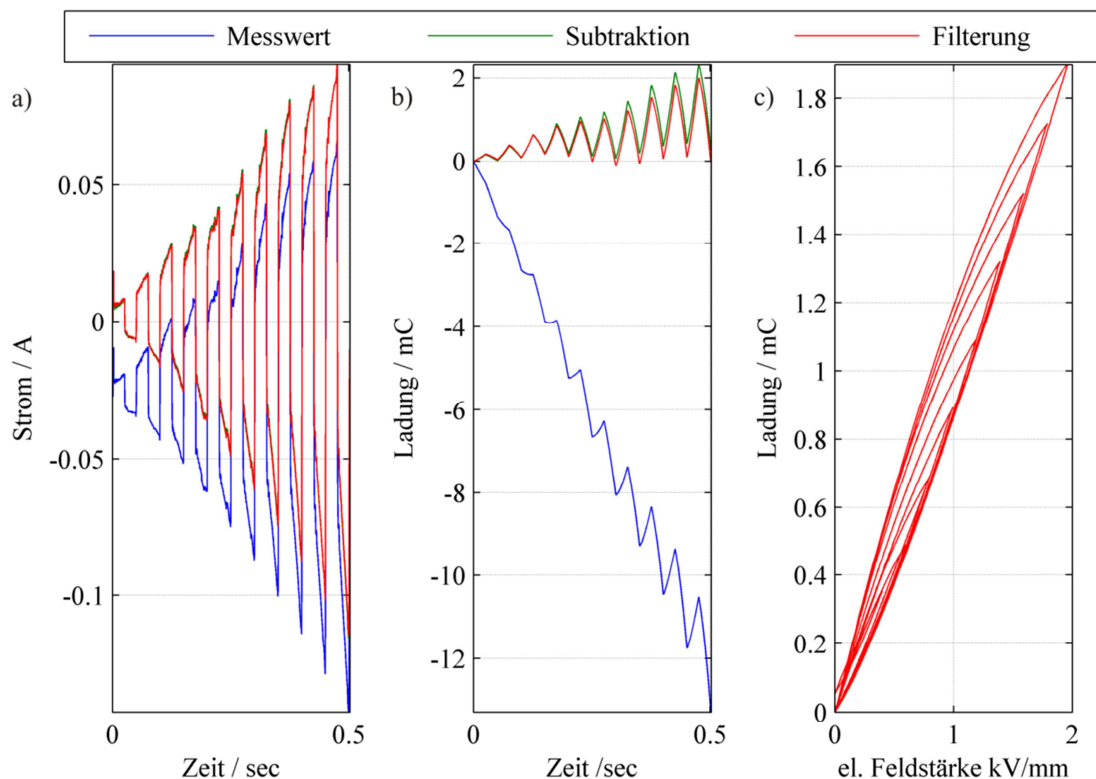


Abbildung 6.3 Ermittlung der Ladung aus dem Stromsignal: a) Strommesswerte, b) Ladung durch Integration aus den Strommesswerten berechnet, c) aus Strommessung ermittelte E-Feld-Ladungshysterese.

Der Vorgang zur Bestimmung der Ladung aus einem Stromsignal ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Teilabbildung a) zeigt die Strommesswerte. In blau sind die Rohmessdaten dargestellt. Bei den grün dargestellten Daten wurde zur Bereinigung des Stromoffsets vom Messwertvektor der erste Eintrag des Messwertvektors subtrahiert. Bei den in Rot dargestellten Daten wurde der oben erwähnte Hochpassfilter verwendet. Teilabbildung b) zeigt die durch Integration aus den Stromdaten ermittelten Ladungen. Bei Verwendung der Rohmessdaten kommt es zu einem stark ausgeprägten Driften des Ladungswertes (blau). Die Subtraktion des ersten Messwertes führt bereits zu wesentlich besseren Ergebnissen (grün). Bei Verwendung des Hochpassfilters werden jedoch zusätzlich niederfrequente Schwankungen des Strommesssignals kompensiert, was die Qualität des Ladungssignals weiter steigert (rot). In Teilabbildung c) wird die mit dem Hochpassfilter ermittelte Ladungs-E-Feld Hysterese dargestellt, welche sich ebenfalls gut mit dem CPM modellieren lassen sollte.

---

### 6.1.2 Abspaltung der nichtlinearen Anteile

---

Die am Prüfstand gemessenen und mit den in Abschnitt 6.1.1 vorgestellten Verfahren korrigierten Messwerte der Dehnungen und elektrischen Flussdichten entsprechen der Überlagerung des linearen und des nichtlinearen Anteils der jeweiligen Messgröße. Um die Messwerte in den linearen und den nichtlinearen Anteil aufzuspalten, werden die linearen Grundgleichungen aus Abschnitt 2.2 verwendet. Da die Messwerte jeweils bei isothermen Bedingungen durchgeführt wurden, entfällt der Temperatureinfluss und es gilt

$$S_{3,lin} = s_3^E T_{mess} + d_{33} E_{mess} \quad (6.1)$$

sowie

$$D_{3,lin} = d_{33} T_{mess} + \epsilon_3 E_{mess}. \quad (6.2)$$

In den Gleichungen (6.1) und (6.2) entsprechen  $s_3^E$ ,  $d_{33}$  und  $\epsilon_3$  den nach der Berlincourt Methode ermittelten linearen Kleinsignalparametern oder alternativ den linearen Großsignalparametern des Aktors.  $T_{mess}$  und  $E_{mess}$  entsprechen der aus der gemessenen Kraft und elektrischen Spannung ermittelten mechanischen Spannung und elektrischen Feldstärke. Die nichtlinearen Anteile lassen sich dann mit dem berechneten linearen Anteil aus den Messwerten bestimmen. Es gilt

$$S_{3,nl} = S_{mess} - S_{3,lin} \quad (6.3)$$

sowie

$$D_{3,nl} = D_{mess} - D_{3,lin}. \quad (6.4)$$

Das typische Ergebnis einer solchen Aufspaltung in linearen und nichtlinearen Anteil unter Verwendung der Kleinsignalparameter ist in Abbildung 6.4 am Beispiel eines Aktors aus PIC 151 Material bei einer Temperatur von 80°C visualisierte. Die so ermittelten nichtlinearen Anteile könne nun mit dem CPM modelliert werden.

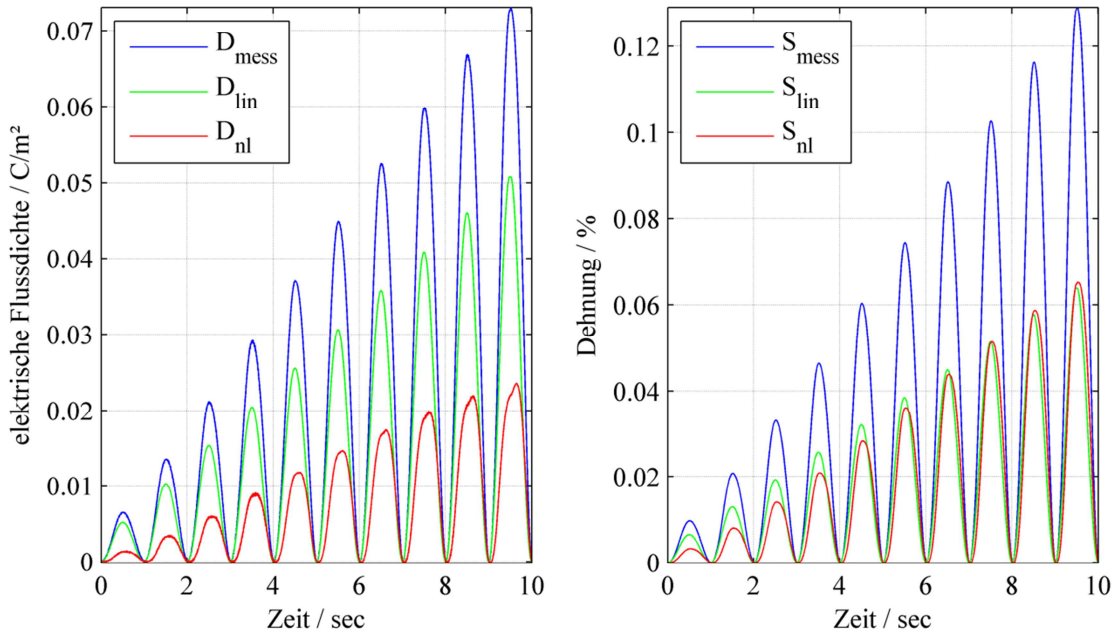


Abbildung 6.4 Aufspaltung der Messwerte in linearen und nichtlinearen Anteil.

### 6.1.3 Ermittlung der Everett-Flächen

Wie in Kapitel 5.1 erläutert, wird der nichtlineare Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{nl}$  mit dem CPM modelliert. Wie in Kapitel 2.9 dargelegt, lässt sich bei der Berechnung des CPM das zeitaufwändige Lösen von Flächenintegralen vermeiden. Hierzu wird das CPM von seiner Integralform (siehe Gleichung (2.46)) in eine Summenform überführt (siehe Gleichung (2.49)). In der Summenform entspricht jeder Summand  $F_{(\alpha,\beta)}$  einem Flächenintegral über eine dreieckige Teilfläche  $T_{(\alpha,\beta)}$  der Preisachfläche. Wie bereits angedeutet, lassen sich die einzelnen Summanden  $F_{(\alpha,\beta)}$  für diskrete Werte, ein geeignetes Testsignal vorausgesetzt, direkt aus den Messwerten bestimmen. Diese Vorgehensweise ist in [35] ausführlich dargestellt und wird hier zum besseren Verständnis kurz zusammengefasst. Die Grundidee der Ermittlung von  $F_{(\alpha,\beta)}$  bzw. der Everett-Flächen ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Ausgangspunkt ist jeweils die so genannte negative Sättigung, welche zum Zeitpunkt  $\tau_0$  vorliegt. In diesem Zustand sind alle Hysterone des CPM deaktiviert. Für einen unipolar betriebenen Piezoaktor liegt diese bei einem elektrischen Feld von 0 V/mm vor. Eine Erhöhung des elektrischen Feldes auf einen Wert  $\alpha_{(\tau_1)}$  führt zu dem in Abbildung 6.5 b) dargestellte Schaltzustand der Hysterone. Der Ausgangswert  $D_{nl}$  des CPM ist für diesen Zustand nach Gleichung (2.47) durch

$$D_{nl(\tau_1)} = - \int_{T_{(E_{max}, E_{min})}} \mu_{(\alpha,\beta)} d\alpha d\beta + 2 \int_{S_+, \tau_1} \mu_{(\alpha,\beta)} d\alpha d\beta \quad (6.5)$$

gegeben. Bei einer anschließende Reduktion der Eingangsspannung auf einen Wert  $\beta$  ergibt sich der in Abbildung 6.5 c) dargestellte Schaltzustand der Hysterone, welcher durch

$$D_{nl(\tau_2)} = - \iint_{T_{(E_{max}, E_{min})}} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta + 2 \iint_{S_+, \tau_2} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \quad (6.6)$$

mathematisch beschrieben ist. Im Übergang von Zeitpunkt  $\tau_1$  zum Zeitpunkt  $\tau_2$  wurden alle Hysteronen auf der Dreiecksfläche  $T_{(\alpha_2, \beta_2)}$  deaktiviert. Durch Subtraktion von Gleichung (6.6) von (6.5) ergibt sich

$$D_{nl(\tau_1)} - D_{nl(\tau_2)} = 2 \iint_{S_+, \tau_1} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta - 2 \iint_{S_+, \tau_2} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta. \quad (6.7)$$

Die Differenz der beiden Flächenintegrale in Gleichung (6.7) entspricht genau dem Integral über die Dreiecksfläche  $T_{(\alpha_2, \beta_2)}$ . Somit gilt

$$D_{nl(\tau_1)} - D_{nl(\tau_2)} = 2 \iint_{T_{(\alpha_2, \beta_2)}} \mu_{(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = 2F_{(\alpha_2, \beta_2)}. \quad (6.8)$$

Durch ein weiteres Absenken des Eingangssignals lassen sich, wie in Abbildung 6.5 d) angedeutet, weitere Werte von  $F_{(\alpha, \beta)}$  ermitteln.

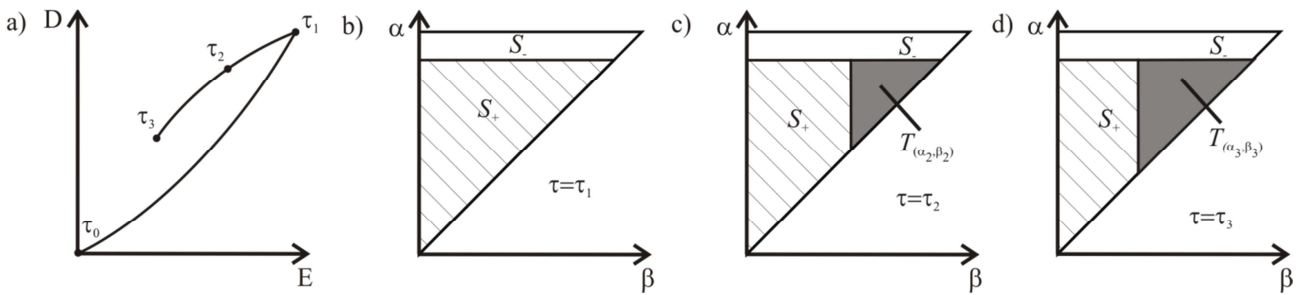


Abbildung 6.5 Vorgehensweise bei der Ermittlung der Everett-Flächen  $F_{(\alpha, \beta)}$ .

Durch das Verwenden einer, wie in Abbildung 6.6 mittig angedeuteten, Sequenz von z. B. Dreieckssignalen mit sukzessive ansteigenden Amplituden lassen sich  $F_{(\alpha, \beta)}$ -Werte für eine diskrete Anzahl von Koordinaten  $(\alpha_i, \beta_i)$  berechnen. Dabei ergeben sich aus dem Eingangssignal  $E_{(\tau)}$ , wie exemplarisch für das vierte Dreieck durch die gepunkteten Linien angedeutet, die Koordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  auf der Preisachfläche. Der Maximalwert des Dreiecks ergibt die  $\alpha$ -Koordinate und die Werte von  $E_{(\tau)}$  auf dem abfallenden Zweig des jeweiligen Dreiecks die  $\beta$ -Koordinaten. Aus den in Abbildung 6.6 rechts dargestellten, dem Eingangssignal zugeordneten Messwerten von  $D_{nl}$  errechnen sich analog zu Gleichung (6.8) die Integralwerte  $F_{(\alpha_i, \beta_i)}$ .

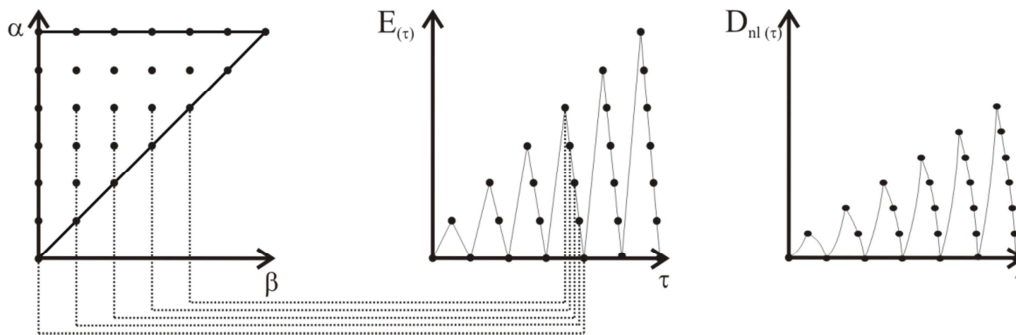


Abbildung 6.6 Zusammenhang zwischen Messwerten und Integralwerten.

Durch Verwendung eines geeigneten Interpolationsalgorithmus lassen sich nun aus den diskreten Werten  $F_{(\alpha_i, \beta_i)}$  kontinuierliche Werte von  $F_{(\alpha, \beta)}$  berechnen.

In dieser Arbeit wurden jeweils Sequenzen aus zehn Dreiecken in Verbindung mit einem linearen Interpolationsalgorithmus verwendet. Mit dieser Kombination lässt sich bereits eine ausreichend hohe Modellgüte erreichen.

## 6.2 Thermisches Aktorteilmodell

Wie in Kapitel 5 beschrieben, wird ein zweidimensionales Aktormodell, basierend auf der Fourierschen Wärmeleitgleichung verwendet. Die Ermittlung der hierfür notwendigen Modellparameter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , Wärmekapazität  $c$  sowie der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  zur Abbildung der Randbedingungen sollen nun nachfolgend genauer erläutert werden.

### 6.2.1 Inverses Problem bei der Bestimmung thermischer Modellparameter

Da die zweidimensionale Form der Fourierschen Wärmeleitgleichung verwendet wird, ist eine analytische Lösung der Differentialgleichung nicht möglich. Eine Lösung ist somit nur auf numerischem Wege möglich. Hierfür gibt es zahlreiche numerische Berechnungswerkzeuge wie die in dieser Arbeit verwendeten Werkzeuge Ansys und die „Partial-Differential-Equation“ Toolbox von Matlab. Beiden Programmen ist gemein, dass sie zur Lösung des so genannten direkten Problems konzipiert sind. Von einem direkten Problem wird gesprochen, wenn bei bekannten Randbedingungen und Materialparametern die Antwort des Systems auf eine Last gesucht wird. Übertragen auf den konkreten Fall eines Piezostapelaktors bedeutet dies, dass die vorkommenden Wärmequellen sowie alle Randbedingungen und Materialparameter bekannt sind und die daraus resultierende Temperatur des Aktors gesucht ist. Bei der hier durchzuführenden Parameteridentifikation ergibt sich jedoch eine andere Fragestellung. Sowohl die Last bzw. Wärmequelle als auch die Reaktion des Systems auf die Wärmequelle wurden messtechnisch erfasst. Die Definition des zu lösenden Problems ist jedoch nur lückenhaft möglich, da nicht alle Randbedingungen und Materialparameter bekannt sind. Es wird also nicht wie beim direkten Problem die Reaktion auf die Belastung gesucht sondern es wird das Modell gesucht, welches die

bekannte Reaktion des realen Systems auf eine bekannte Last am besten abbildet. Solche Fragestellungen werden als inverse Probleme bezeichnet.

Um ein solches inverses Problem mit der oben erwähnten Software zu lösen muss es in ein direktes Problem überführt werden. Dies ist, wie in Abbildung 6.7 gezeigt durch Überführung des inversen Problems in eine Optimierungsaufgabe möglich.

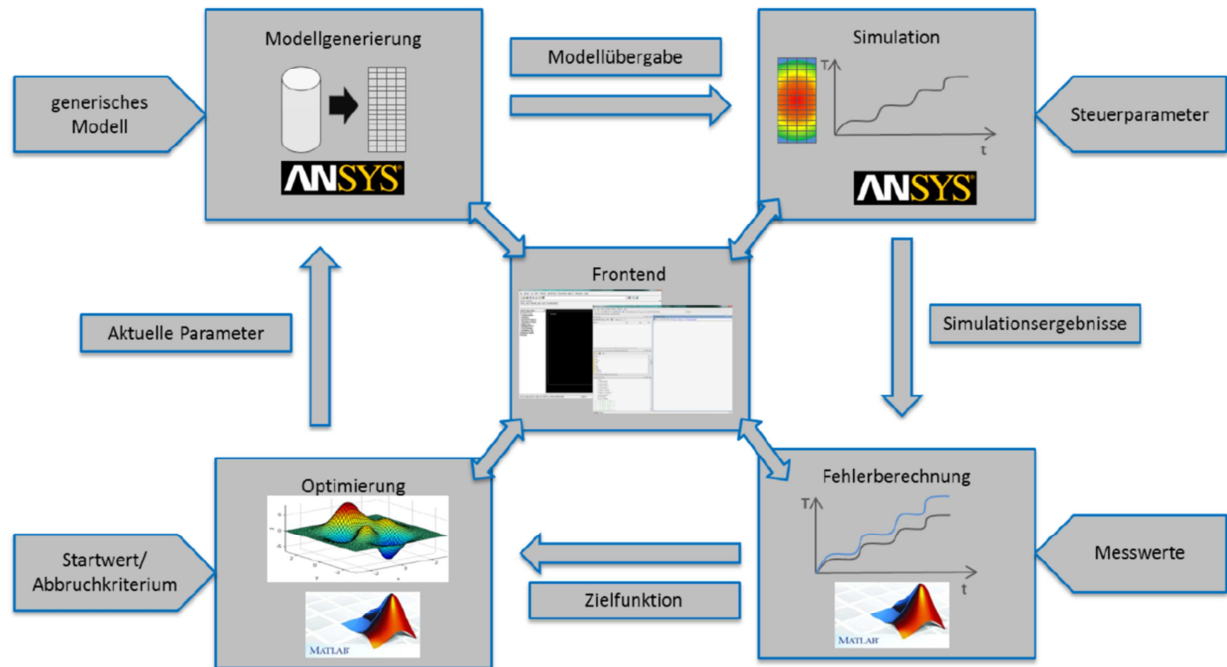


Abbildung 6.7 Optimierungsaufgabe zum Lösen des inversen Problems [169],[170].

Ausgangspunkt dieser Optimierungsaufgabe ist ein generisches Aktormodell. Dieses beinhaltet bereits alle bekannten Modellparameter und -größen, wie z. B. die Geometrie des Aktors sowie die grundlegenden Modellgleichungen. Die gesuchten Modellparameter stellen die Variablen des generischen Modells dar. Mit Hilfe eines Startparametersatzes, welcher in Abschnitt 6.2.2 hergeleitet wird, wird im Präprozessor der Software Ansys ein erstes diskretes Modell aus dem generischen Modell abgeleitet. Dieses diskrete Modell wird an den Löser des Softwarepakets Ansys übergeben und von diesem numerisch gelöst. Dies ist ohne weiteres möglich, weil es sich hierbei um ein direktes Problem handelt. Die Simulationsergebnisse werden daraufhin mit Hilfe eines Zielfunktionalen mit den Messwerten abgeglichen. Dabei ist das Zielfunktional so zu gestalten, dass es minimal wird, wenn die Simulationsergebnisse exakt mit den Messwerten übereinstimmen. Der Zielfunktionalwert wird als Eingangsgröße für einen Optimierungsalgorithmus verwendet. Dieser versucht den Zielfunktionalwert zu minimieren, indem er neue Modellparameter für das generische Modell vorschlägt. So beginnt der Optimierungskreislauf von neuem. Eine Konvergenz des Optimierungsalgorithmus vorausgesetzt, lässt sich so das inverse Problem durch sukzessives Berechnen von direkten Problemen lösen und so die gesuchten Modellparameter bestimmen.

---

### 6.2.2 Analytische Abschätzung der thermischen Modellparameter

---

Für die Initialisierung des Optimierungsalgorithmus zum Identifizieren der Modellparameter werden geeignete Startwerte benötigt. Diese werden nachfolgend grob analytisch abgeschätzt. Wie bei der Modellbildung des Aktors in Abschnitt 5.2 erläutert, weisen die untersuchten Aktoren eine aus dem geschichteten Aufbau herrührende thermische Transversalisotropie auf. Dies macht eine Unterscheidung zwischen der elektrodenparallelen Richtung und der Richtung senkrecht zur Elektrode notwendig. Um die Wärmeleitfähigkeiten für beide Richtungen abschätzen zu können, muss die Geometrie sowie der genaue Aufbau der Elektrode berücksichtigt werden. Bei der Elektrode, welche bei den untersuchten Aktoren aus einer  $\text{CuBe}_2$ -Legierung gefertigt ist, handelt es sich jedoch um kein Vollmaterial, sondern um ein poröses Ätzteil. So kann der Kleber durch die Elektrode hindurch dringen. Die Elektrode selbst hat eine Dicke von  $h_e = 50 \mu\text{m}$ . Beim Verkleben ergibt sich ein zusätzlicher Dickenzuwachs von ca.  $h_k = 10 \mu\text{m}$ . Für Kleber und Elektrode zusammen ergibt sich folglich eine Schichtdicke von  $h_{e,k} = 60 \mu\text{m}$ . Die exakte Geometrie der Elektrode, insbesondere wie viel Material herausgeätzt wurde, ist jedoch nicht bekannt. Deshalb werden im Weiteren die Elektrode und der Kleber gedanklich verwischt als ein homogenes, isotropes Material angenommen. Für die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{k,e}$  des Elektroden-Kleber-Gemisch wird

$$\lambda_{k,e} = \gamma \lambda_k + (1 - \gamma) \lambda_e \quad (6.9)$$

angenommen, wobei  $\gamma$  als der Volumenanteil des Klebers im Kleber-Elektroden-Materialgemisch interpretiert werden kann.

Unter Ausnutzung des Wärmewiderstandsanalogons [34] ergibt sich für die Wärmeleitfähigkeit parallel zur Elektrodenrichtung

$$\lambda_{ges,||} = \frac{h_c \lambda_c + h_{e,k} \lambda_e - \gamma h_{e,k} \lambda_e + \gamma h_{e,k} \lambda_k}{h_c + h_{e,k}}. \quad (6.10)$$

Senkrecht zur Elektrode ergibt sich

$$\lambda_{ges,\perp} = \frac{\lambda_c (h_c \lambda_e - \gamma h_c \lambda_e + h_{e,k} \lambda_e - \gamma h_{e,k} \lambda_e + \gamma h_c \lambda_k + \gamma h_{e,k} \lambda_k)}{h_{e,k} \lambda_c + h_c \lambda_e - \gamma h_c \lambda_e + \gamma h_c \lambda_k}. \quad (6.11)$$

Tabelle 6.1 Materialparameter der Komponenten eines Stapelaktors.

Material	Wärmeleitfähigkeit in W/(mK)	Wärmekapazität in J/(kgK)	Schichtdicke in mm	Dichte in kg/m <sup>3</sup>
Keramik	$\lambda_c = 1,1$	$c_c = 400$	$h_c = 0,5$	$\rho_c = 7800$
Elektrode	$\lambda_e = 100$	$c_e = 420$	$h_e = 0,05$	$\rho_e = 8360$
Kleber	$\lambda_k = 0,38$	$c_k = 0,96$	$h_k = 0,01$	$\rho_k = 1200$

Die Wärmekapazität eines Stoffgemisches lässt sich gemäß der Formel

$$c_{m,ges} m_{ges} = \sum_1^n c_i m_i \quad (6.12)$$

berechnen, wobei  $c_i$  und  $m_i$  die Wärmekapazität bzw. die Masse der Komponenten des Stoffgemisches sind. Unter Berücksichtigung der Volumenanteile der einzelnen Komponenten am Gesamtvolumen des Aktors sowie der Dichte der einzelnen Materialien ergibt sich aus Gleichung (6.12) die mittlere Wärmekapazität  $c_{m,ges}$  des Aktors

$$c_{m,ges} = \frac{c_c h_c \rho_c + c_e h_{e,k} \rho_e - c_e \gamma h_{e,k} \rho_e + c_k \gamma h_{k,e} \rho_k}{h_c \rho_c + h_{e,k} \rho_e - \gamma h_{e,k} \rho_e + \gamma h_{e,k} \rho_k}. \quad (6.13)$$

Unter Verwendung der in Tabelle 6.1 angegebenen Materialparameter der Aktorkomponenten ergeben sich durch Auswerten der Gleichungen (6.10), (6.11) und (6.13) die in Abbildung 6.8 dargestellten thermischen Materialparameter des Aktormaterials als Funktion des volumetrischen Kleberanteils in der Elektrodenschicht  $\gamma$ .

Die Leitfähigkeit der Elektrode beeinflusst maßgeblich die Wärmeleitfähigkeit parallel zur Elektrode. Für die elektrodenparallele Wärmeleitfähigkeit ergeben sich in Abhängigkeit von  $\gamma$  Werte zwischen 11,7 W/(mK) und 1,0 W/(mK). Die Auswirkungen auf die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Elektrode sind viel geringer. Die möglichen Werte für  $\lambda_{ges,\perp}$  liegen zwischen 1,23 W/(mK) und 0,9 W/(mK).

Für die Wärmekapazität des Aktormaterials ergeben sich Werte zwischen 344 J/(kgK) und 359 J/(kgK). Hierbei dominieren die Keramik und das Elektrodenmaterial das Ergebnis. Der Kleber hat trotz seiner deutlich geringeren Wärmekapazität wegen seiner niedrigen Dichte nur einen geringen Einfluss.



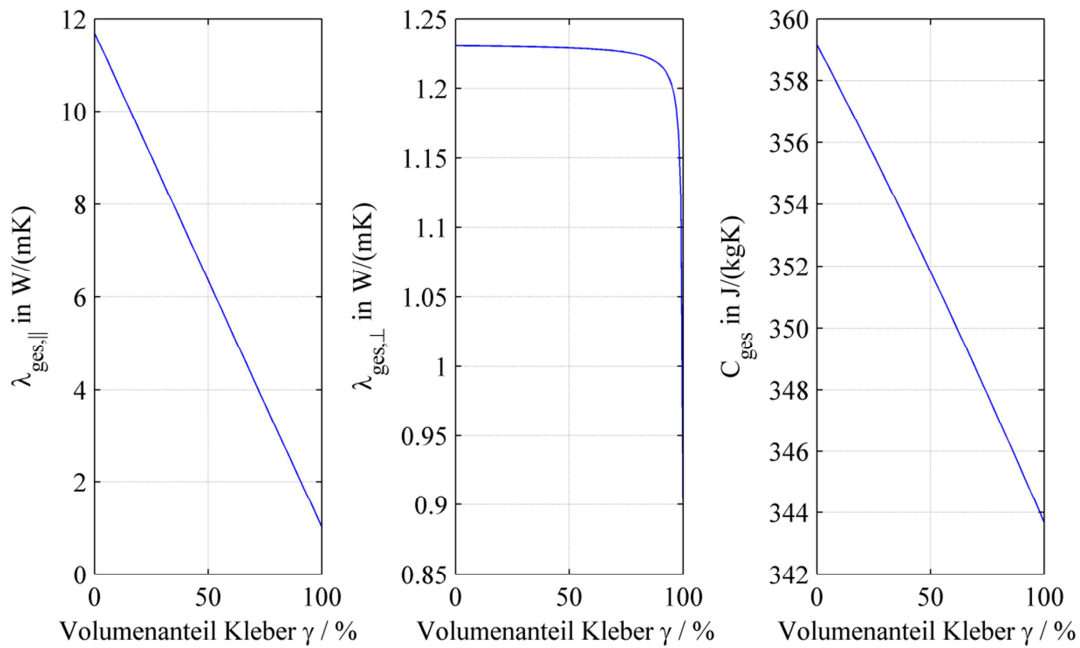


Abbildung 6.8 Abgeschätzte Materialparameter als Funktion des volumetrischen Kleberanteils in der Elektroden-schicht  $\gamma$ .

Als weitere Modellparameter verbleiben die Randbedingungen, welche zur Lösung der Wärmeleitgleichung notwendig sind. An der Aktoroberfläche muss der Wärmeübergangskoeffizient bestimmt werden. Dieser setzt sich aus einem konvektiven und einem Strahlungsanteil zusammen

$$\alpha_{ges} = \alpha_{konv} + \alpha_{rad}. \quad (6.14)$$

Unter Verwendung der in Kapitel 2.11 vorgestellten Näherungsgleichungen ergeben sich die in Abbildung 6.9 dargestellten Wärmeübergangskoeffizienten als Funktion der mittleren Wandtemperatur  $\Delta\theta_m$ . Die mittlere Wandtemperatur  $\Delta\theta_m$  entspricht dem arithmetischen Mittel der Oberflächen- und der Umgebungstemperatur. Dabei wurde von einem Aktor mit einem Durchmesser von 25 mm mit einer Länge von 60 mm ausgegangen. Als Umgebungsmedium wurde Luft bei einem Druck von 1 bar bei einer Temperatur von 20 °C angenommen. Die Stoffwerte wurden gemäß der in [142] angegebenen Näherungsgleichungen in Abhängigkeit von der mittleren Wandtemperatur  $\Delta\theta_m$  berechnet.

Im dargestellten Temperaturbereich zeigt der Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung  $\alpha_{rad}$  einen nahezu linearen Verlauf. Er nimmt Werte zwischen 4,4 W/(m²K) und 9,94 W/(m²K) an. Die freie Konvektion führt zu einem deutlich nichtlinearen Verlauf der Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{f,konv}$ . Bei niedrigen Wandtemperaturen nahe der Umgebungstemperatur ergeben sich nur sehr geringe Wärmeübergangskoeffizienten von 3,7 W/(m²K). Bei höheren Temperaturen ergeben sich Werte von 10 W/(m²K), was auf dem Niveau des durch Strahlung hervorgerufenen Wärmeübergangskoeffizienten liegt. Bei einer angenommenen Anströmgeschwindigkeit von 2 m/sec ergibt sich ein Wärmeübergangskoeffizient von 11,7 W/(m²K), welcher nahezu unabhängig

von der Aktorwandtemperatur ist. Durch Überlagern von freier und erzwungener Konvektion gemäß Gleichung (2.72) ergibt sich der lila dargestellte Wärmeübergangskoeffizient der Mischkonvektion  $\alpha_{m,konv}$ . Dieser nimmt Werte zwischen 12 W/(m²K) und 17 W/(m²K) an. Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{ges}$ , welcher sich aus der Summe von Konvektion und Strahlung zusammen setzt, wird in Abbildung 6.8 blau dargestellt. Er ist geeignet, den gesamten Energieaustausch über die Aktoroberfläche abzubilden.

Als letztes verbleiben die Randbedingungen an den Aufstandsflächen des Aktors. Der über diese Flächen geleitete Wärmestrom wird experimentell ermittelt. Deshalb kann auf eine Abschätzung der Parameter verzichtet werden.

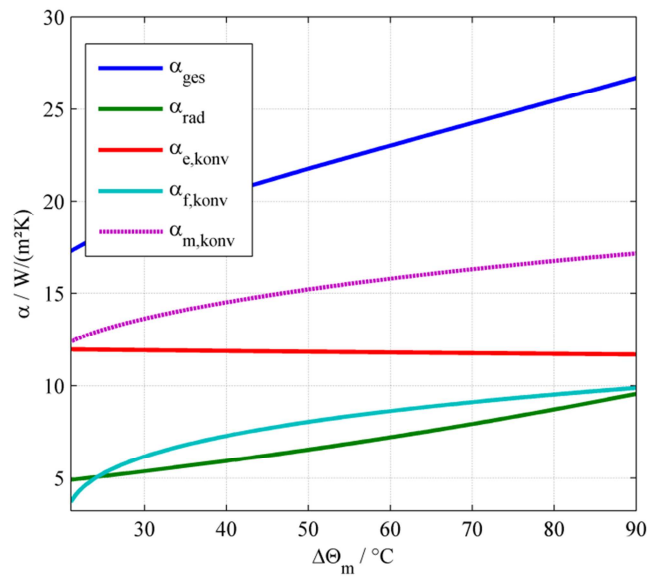


Abbildung 6.9 Abgeschätzte Wärmeübergangskoeffizienten als Funktion der mittleren Wandtemperatur  $\Delta\theta_m$ .

### 6.2.3 Durchführung der Optimierung

Die Ermittlung der Materialparameter erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden aus den stationären Temperaturmesswerten die Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{ges,\parallel(\theta)}$  und  $\lambda_{ges,\perp(\theta)}$  sowie der mittlere Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{(\Delta\theta_m)}$  bestimmt. Im stationären Fall vereinfacht sich Gleichung (5.24) zu

$$\lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = 0, \quad (6.15)$$

so dass die Dichte und die Wärmekapazität heraus fallen. Diese werden in einem zweiten Schritt unter Verwendung der zuvor ermittelten Wärmeleitfähigkeiten und Wärmeübergangskoeffizienten bestimmt.

Die experimentellen Ergebnisse von Kallaev et al. [171] lassen vermuten, dass die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Keramikmaterials im untersuchten

Temperaturbereich nur sehr gering ist. Würde sich die Aktortemperatur allerdings der Curie-Temperatur der Keramik nähern, wäre diese Annahme nicht mehr zulässig. Da beim Betrieb der Aktoren jedoch stets ein ausreichender Abstand zur Curie-Temperatur eingehalten wird kann für die Wärmeleitfähigkeit in Elektrodenrichtung  $\lambda_{ges,\parallel}$  und senkrecht zur Elektrodenrichtung  $\lambda_{ges,\perp}$  jeweils ein konstanter Werte angenommen werden.

Die in Abbildung 6.9 dargestellte Abschätzung des Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{ges}$  legt nahe, dass sich die Temperaturabhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten mit einer linearen Gleichung annähern lässt. Deshalb wird dieser als

$$\alpha_{ges(\Theta_m)} = a_\alpha \Theta_m + b_\alpha \quad (6.16)$$

angenommen. Durch diesen Ansatz soll näherungsweise sowohl der Konvektions- als auch der Strahlungswärmeaustausch abgebildet werden. Auf eine explizite Berechnung des Strahlungsaustausches wird bewusst verzichtet, da der ermittelte Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{ges}$  ohnehin nur für die untersuchte Prüfstandskonfiguration gültig ist. Er ist nicht auf andere Aktorgeometrien übertragbar, so dass kein Zusatznutzen durch die Aufspaltung entsteht. Durch die Identifikation des Wärmeübergangskoeffizienten wird jedoch sichergestellt, dass der radiale Wärmestrom an der Aktoroberfläche richtig abgebildet wird. So werden die Temperaturgradienten innerhalb des Aktors nicht verfälscht, welche für die Ermittlung der Wärmeleitfähigkeiten entscheidend sind.

Somit ergeben sich vier Modellparameter ( $\lambda_{ges,\parallel}$ ,  $\lambda_{ges,\perp}$ ,  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$ ), welche durch stationäre Simulationen zu bestimmen sind. Ein Simulationsdurchlauf schließt jeweils alle in Abschnitt 4.3 dargestellten  $n_{loss}=5$  Verlustleistungsstufen (3 W, 6 W, 9 W, 12 W, 15 W) ein. So wird mit jedem Simulationsdurchlauf der gesamte untersuchte Temperaturbereich abgedeckt, was eine genaue Bestimmung der Modellparameter ermöglicht.

Zum Bewerten der Güte der gefundenen Modellparameter wird ein Zielfunktional benötigt, welches durch den Optimierungsalgorithmus minimiert wird. Zur Bewertung einer einzelnen Simulation  $k$  bietet sich die Wurzel aus dem quadratischen mittleren Fehlers der  $n_{sens} = 5$  gemessenen Temperaturen an

$$F_{opt,k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{sens}} (\Theta_{mess}(i) - \Theta_{sim}(i))^2}{n_{sens}}}. \quad (6.17)$$

Um den Gesamtfehler eines Simulationsdurchlaufes zu erhalten, wird über alle Verlustleistungsstufen summiert:

$$F_{opt,ges} = \sum_{k=1}^{n_{loss}} F_{opt,k}. \quad (6.18)$$

Anschließend erfolgt, wie bereits erwähnt, die Bestimmung der Wärmekapazität. Hierzu werden mit den aus den stationären Simulationen bestimmten Modellparametern transiente Simulationen der in Kapitel 4.3 dargestellten Aufheizvorgänge durchgeführt. Als Zielfunktional wird zunächst für

---

jeden Simulationszeitschritt der mittlere quadratische Fehler berechnet. Anschließend wird über die Menge aller Zeitschritte summiert.

## 7 Ergebnisse der Parameteridentifikation

Kapitel 7 fasst die Ergebnisse der Parameteridentifikation zusammen. Zunächst wird auf den piezoelektrischen Modellteil eingegangen, im Anschluss auf den thermischen.

### 7.1 Parameter des piezoelektrischen Modellteils

Die linearen Parameter des piezoelektrischen Modells wurden bereits in Kapitel 4.1 und 4.2 dargestellt, so dass an dieser Stelle darauf verwiesen sei. Somit verbleiben lediglich die Parameter des nichtlinearen Modellteils. Dies sind die Everett-Flächen des Preisach-Modells  $F_{(\alpha,\beta)}$  zur Beschreibung des nichtlinearen Anteils der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  sowie die Polynomkoeffizienten  $k_i$  zur Abbildung des nichtlinearen Teils der Dehnung. Beide Parametertypen haben gemeinsam, dass sie aufgrund ihrer eher mathematischen Natur nicht unmittelbar physikalisch interpretierbar sind und somit nur eine geringe Aussagekraft haben. Deshalb werden hier nur ausgewählte, jedoch für die weiteren Parametersätze repräsentative, Beispiele dargestellt. Die Everett-Flächen  $F_{(\alpha,\beta)}$  eines Aktors aus PIC 255 Material für mittlere Temperaturen von 20 °C und 140 °C bei einer Umgebungssteifigkeit von 30 N/ $\mu$ m und einer Vorspannung von 30 MPa sind in Abbildung 7.1 dargestellt. Zur Modellierung des linearen Anteils wurden lineare Kleinsignalparameter verwendet.

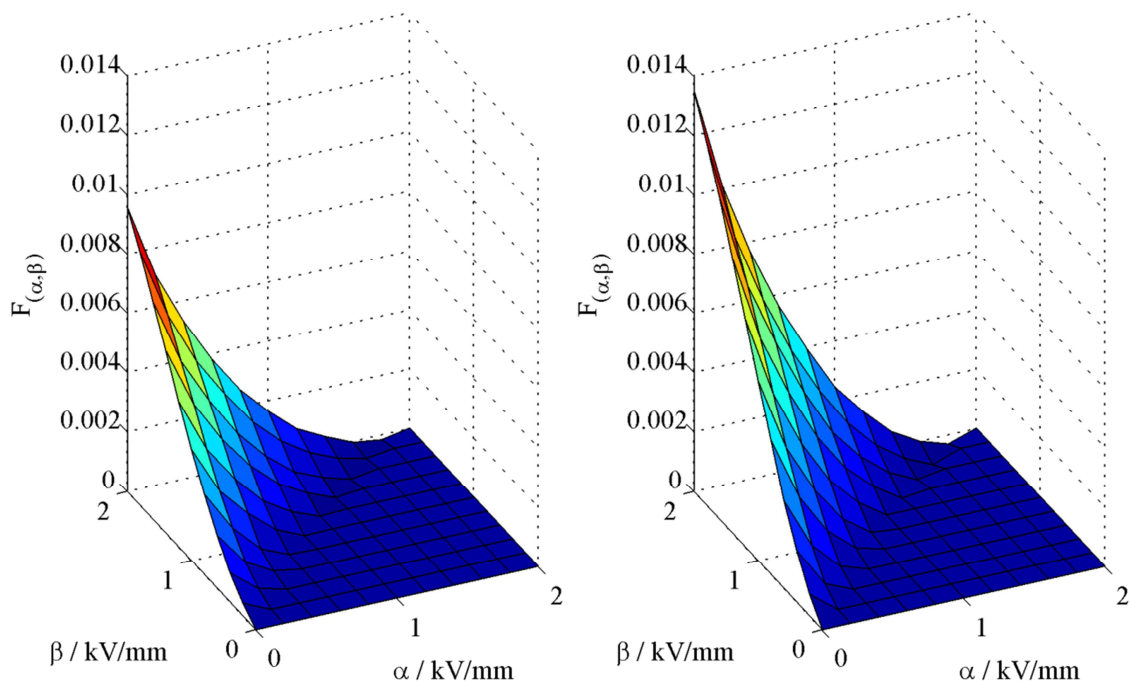


Abbildung 7.1 Vergleich zweier experimentell ermittelter Everett-Flächen  $F_{(\alpha,\beta)}$  eines Aktors aus PIC 255 Material gemessen bei einer Aktortemperatur von 20 °C (links) und 140 °C (rechts).

Die beiden Flächen ähneln sich qualitativ betrachtet stark, was auf die ähnliche Form der Hystereseschleifen zurückzuführen ist. Die bei einer Temperatur von 140 °C gemessene Everett-Fläche (rechts) weist jedoch betragsmäßig höhere Werte auf. Ursache hierfür ist, dass der nichtlineare Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  mit der Temperatur betragsmäßig zunimmt. Abbildung 7.2 zeigt die Koeffizienten, welche zur Berechnung des nichtlinearen Anteils der Aktorlängenänderung  $\Delta l_{nl}$  aus dem nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  nach Gleichung (5.9) benötigt werden, als Funktion der mittleren Aktortemperatur  $\Theta_{avg}$ . Diese sind für einen Aktor aus PIC 255 Material bei einer Vorspannung von 30 MPa und einer Umgebungssteifigkeit von 30 N/ $\mu$ m gültig. Durch die Kreuze wird jeweils ein experimentell bestimmter Koeffizient repräsentiert. Die blauen durchgezogenen Linien repräsentieren die verwendeten linearen Interpolationsfunktionen.

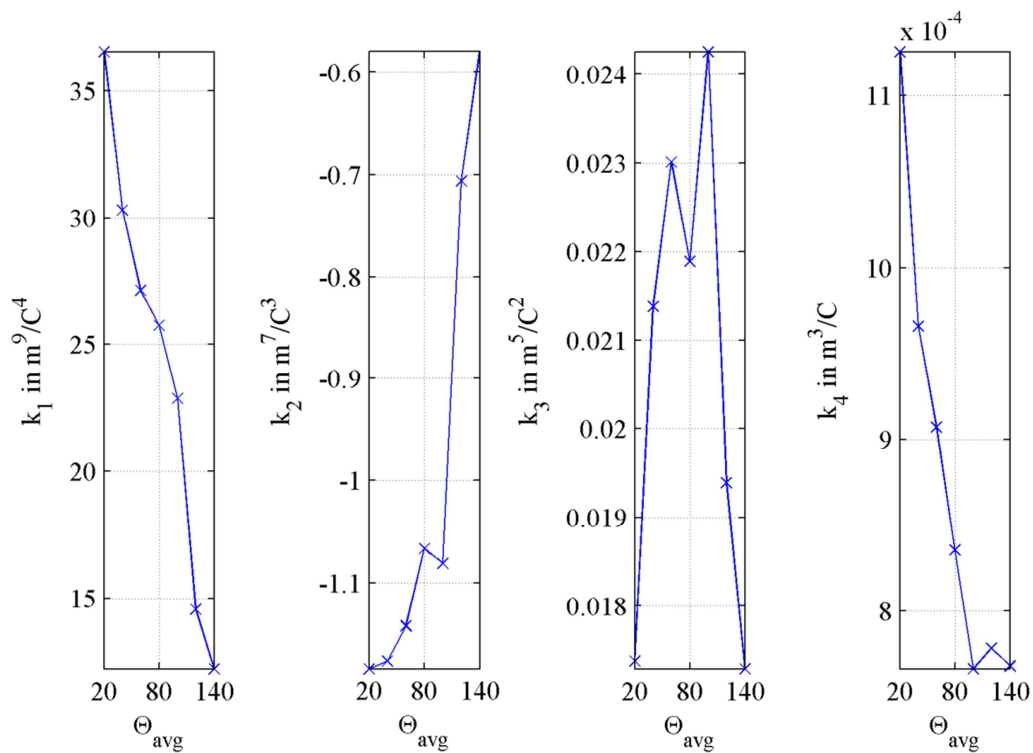


Abbildung 7.2 Koeffizienten zur Bestimmung des nichtlinearen Anteils der Längenänderung  $\Delta x_{nl}$  aus dem nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl}$ .

Durch das Einsetzen der in Abbildung 7.2 dargestellten Koeffizienten in Gleichung (5.9) und anschließendes Auswerten in Abhängigkeit von der Temperatur  $\Theta_{avg}$  und dem nichtlinearen Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl(E)}$  erhält man den in Abbildung 7.3 aufgetragenen nichtlinearen Anteil der Aktorlängenänderung  $\Delta l_{nl}$ . Im Gegensatz zum teilweise nicht monotonen Verlauf der Koeffizienten ergibt sich hier nach der Auswertung im zur Datenerfassung genutzten Bereich eine stetige, weitgehend monotone Funktion.

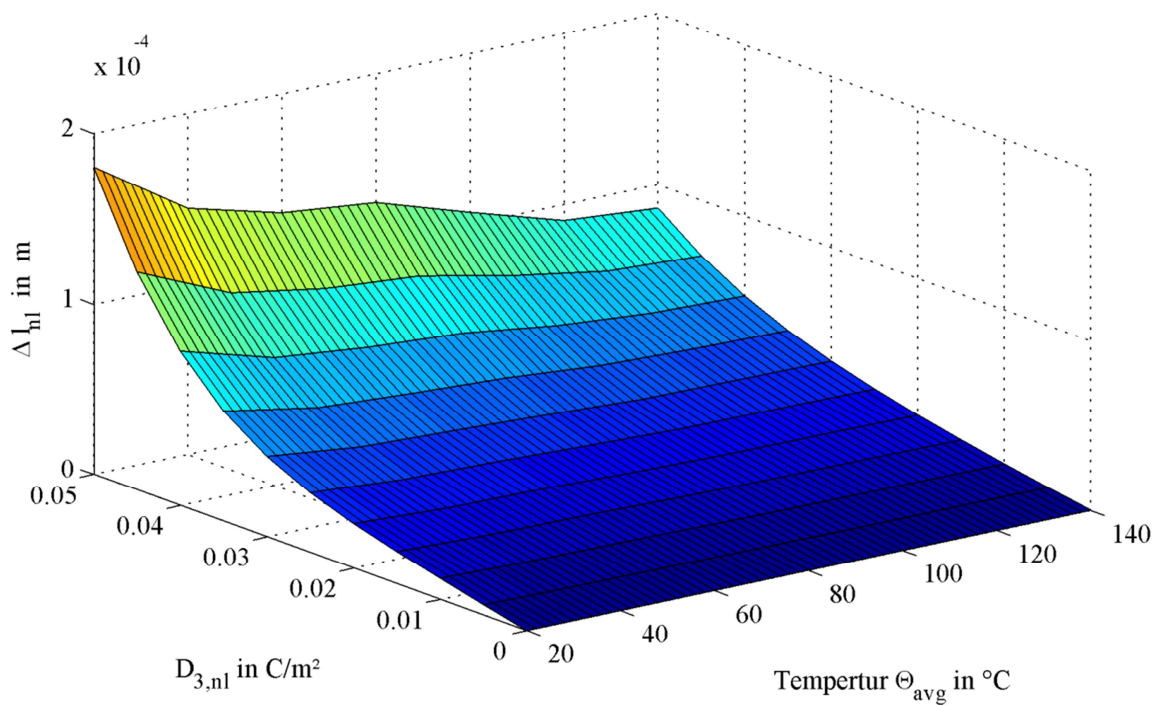


Abbildung 7.3 Visualisierung des Zusammenhangs zwischen nichtlinearem Anteil der elektrischen Flussdichte  $D_{3,nl}$  und der Aktorlängenänderung  $\Delta l_{nl}$  für unterschiedliche mittleren Aktortemperaturen  $\Theta_{avg}$ .

## 7.2 Parameter des thermischen Aktormodellteils

Die Ergebnisse der Parameterschätzung des thermischen Aktormodells sind in Abbildung 7.4 dargestellt. Die linke Teilabbildung stellt die beiden als nicht temperaturabhängig angenommenen Wärmeleitfähigkeiten und der rechte Abbildungsteil den als linear temperaturabhängig angenommenen Wärmeübergangskoeffizienten dar.

Durch die Fehlerbalken wird der nach Gleichung (3.5) berechnete maximale Fehler dargestellt. Hierbei wird angenommen, dass alle Fehler mit maximalem Betrag zeitgleich auftreten und sich dabei aufaddieren. Somit handelt es sich um eine sehr konservative Abschätzung. Der reale Bestimmungsfehler ist mit hoher Wahrscheinlichkeit kleiner.

Die zur Auswertung von Gleichung (3.5) notwendigen partiellen Ableitungen der Modellparameter  $y_i$  (bzw. des „Anzeigewertes“) nach den Messwerten  $x_i$  wurden auf numerischem Wege über einen Differenzenquotient bestimmt. Diese Vorgehensweise ist notwendig, da sich die Bestimmungsgleichung, also der Optimierungsalgorithmus inklusive des Aktormodells, nicht in Form einer Gleichung angeben lässt. Somit lassen sich die partiellen Ableitungen nicht analytisch berechnen. Um einen solchen Differenzenquotienten berechnen zu können, wird jeweils ein Messwert  $x_i$  mit einem kleinen Offset  $\Delta x_i$  versehen und anschließend die gesamte Optimierungsprozedur durchlaufen. Mit dem nominellen Modellparameter  $y_{nom}$  und dem aus der offsetbehafteten Optimierung hervorgehenden Modellparametern  $y_{offset}$  lässt sich die partielle Ableitung annähern durch:



$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \approx \frac{y_{nom} - y_{offset}}{\Delta x_i}. \quad (7.1)$$

Berücksichtigt wurden bei der Fehlerabschätzung die Messfehler der Temperatursensoren, der Verlustleistung, der Wärmestromsensoren sowie die Positionen der Temperatursensoren. Die angenommenen Messabweichungen sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Eine genauere Betrachtung der Fehlerberechnung ergibt, dass die Positionierung der Temperatursensoren innerhalb des Aktors einen sehr großen Einfluss auf den Bestimmungsfehler hat.

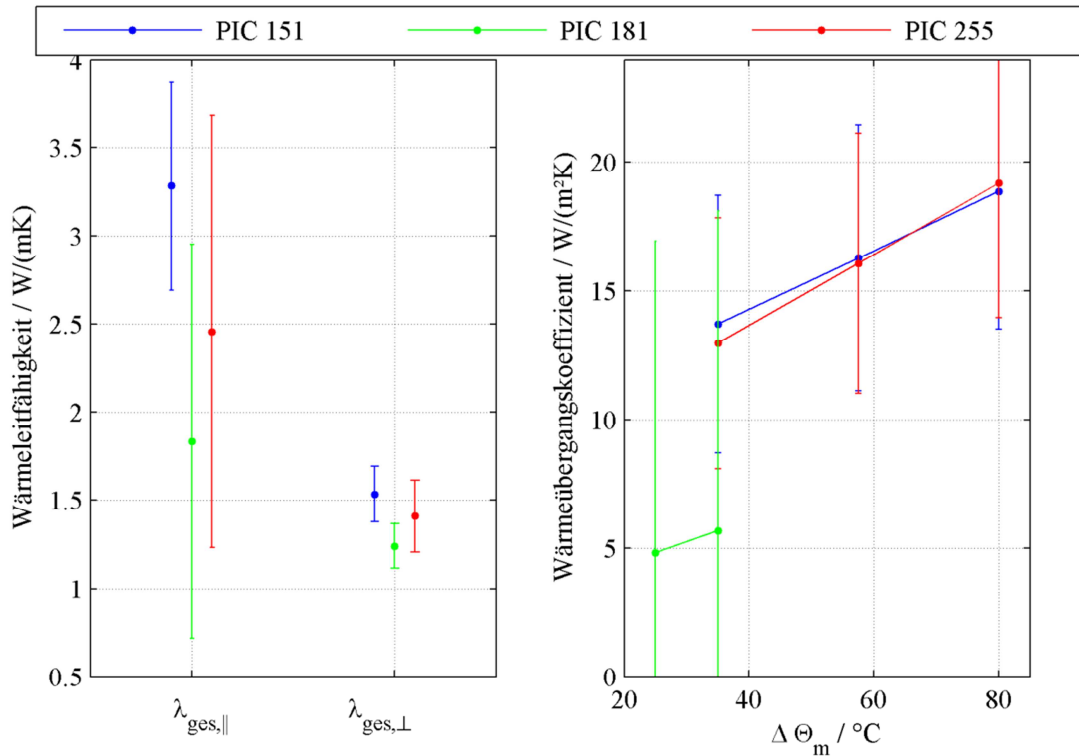


Abbildung 7.4 Ergebnis der Parameterschätzung des thermischen Aktormodell aus stationären Simulationen.

Wie erwartet liegt die gefundene Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{ges,||}$  in Elektrodenrichtung über der Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Elektrodenrichtung  $\lambda_{ges,\perp}$ . Für PIC 151 ergibt sich in Elektrodenrichtung ein Wert von 2,46 W/(mK), für PIC 181 ein Wert von 1,84 W/(mK) und für PIC 255 ein Wert von 3,28 W/(mK). Der mögliche Bestimmungsfehler der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{ges,||}$  ist jedoch relativ groß, so dass sich die Fehlerbalken aller drei untersuchten Materialien überschneiden. Somit ist es durchaus möglich, dass die Werte näher beieinander liegen als die Betrachtung der nominellen Parameter vermuten lässt. Für die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Elektrode ergeben sich ähnliche Werte im Bereich von 1,24 W/(mK) für PIC181 bis zu 1,53 W/(mK) für PIC 255. Aufgrund des größeren Abstands der Temperatursensoren an der Oberfläche der Aktoren fällt hier der durch eine nicht exakte Positionierung der Sensoren hervorgerufene Fehler erheblich geringer aus.



Tabelle 7.1 Angenommene Messfehler der einzelnen Sensoren bzw. Messgrößen

Bezeichnung der fehlerbehafteten Größe	Betrag der Abweichung
Wärmequelle $\dot{q}$	0,05 W
Temperatursensoren	0,15 °C
Wärmeströme über Stirnfläche	10 W/(m <sup>2</sup> K)
Positionsabweichung Temperatursensoren	0,5 mm

Die ermittelten Wärmeübergangskoeffizienten entsprechen den erwarteten Werten. Dass die Werte bei PIC 181 niedriger sind als bei PIC 151 und PIC 255, lässt sich dadurch erklären, dass PIC 181 nur bei niedrigeren Temperaturen untersucht wurde. Ein weiteres Aufheizen von PIC 181 scheiterte an den geringen Verlusten des Keramikmaterials. Um den Aktor auf 60 °C zu erwärmen, war eine Betriebsfrequenz von ca. 100 Hz bei einer peak-peak E-Feldamplitude von 2 kV/mm notwendig. Höhere elektrische Felder und Frequenzen lassen sich mit dem verwendeten Prüfstand nicht realisieren. Bei diesen Temperaturen ist die freie Konvektion nur schwach ausgeprägt, so dass sich geringere Wärmeübergangskoeffizienten ergeben. Ein Vergleich des gefundenen Wärmeübergangskoeffizienten mit den Ergebnissen der Parameterschätzung in Abschnitt 6.2.2 ergibt, dass die experimentell bestimmten Werte gut mit der Summe aus der Abschätzung des Strahlungswärmeübergangskoeffizienten und des Wärmeübergangskoeffizienten der freien Konvektion übereinstimmen. Daraus lässt sich folgern, dass erzwungene Konvektion am Prüfstand nicht von Bedeutung ist. Der Wärmeübergangskoeffizient eines frei stehenden Aktors lässt sich somit gut mit den Gleichungen (2.67) und (2.73) abschätzen.

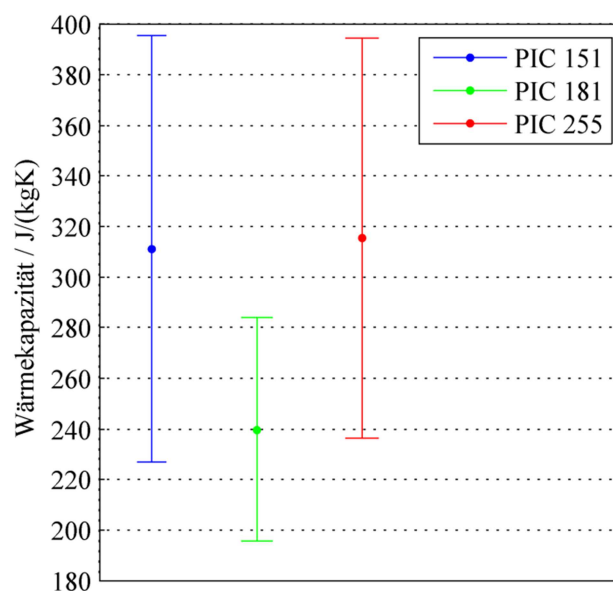


Abbildung 7.5 Wärmekapazitäten der untersuchten Aktoren.

---

Die ermittelten Wärmekapazitäten sind in Abbildung 7.5 zusammengefasst. Die spezifische Wärmekapazität  $c$  der Aktoren aus PIC 151 und PIC 255 liegen bei ca. 315 J/(kgK), die des Aktors aus PIC 181 liegt niedriger, bei ca. 240 J/(kgK). Die Fehlerbalken geben erneut den maximal möglichen Fehler an. Bei der Berechnung dieses Fehlers wurden alle oben erwähnten Fehlermöglichkeiten berücksichtigt sowie zusätzlich der maximale Fehler der Parameter  $\lambda_{ges,||}$ ,  $\lambda_{ges,\perp}$  und  $\alpha_{ges}$ . Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{ges}$  leistet den dominanten Beitrag zum Bestimmungsfehler der Wärmekapazität. Alle anderen Fehlerbeiträge sind deutlich kleiner. Somit ist zur Verbesserung der Schätzung der Wärmekapazität eine genauere Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten notwendig. Dies war mit dem vorhandenen Messaufbau jedoch nicht möglich.

---

## 8 Modellvalidierung

---

In diesem Kapitel werden Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen. Dabei werden stets Datensätze verwendet, welche nicht zur Identifikation der Modellparameter eingesetzt wurden. Beide Modellteile werden, zur Verbesserung der Nachvollziehbarkeit, getrennt voneinander behandelt. Abschließend werden in Abschnitt 8.3 die Einschränkungen des gewählten Modellansatzes diskutiert.

---

### 8.1 Validierung des piezoelektrischen Modellteils

---

In Kapitel 5.1 wurden verschiedene Modellvarianten vorgestellt. Diese werden nun mit Messwerten verglichen. Abschnitt 8.1.1 behandelt die beiden Ansätze zur Abbildung der Temperaturabhängigkeit. In Abschnitt 8.1.2 wird die Modellqualität bei Verwendung der linearen Klein- oder Großsignalparameter verglichen. Im Abschnitt 8.1.3 erfolgt die Validierung des Modells mit einem für Aufgaben der aktiven Schwingungsminderung typischen elektrischen Ansteuerungssignal.

---

#### 8.1.1 Modellgüte der Temperaturabhängigkeit

---

In Kapitel 5.1.4 wurden zwei verschiedene Ansätze zur Modellierung der Temperaturabhängigkeit vorgestellt. Zum einen wurden zwei eigentlich temperaturunabhängige Modelle überblendet, zum anderen wurde zur Abbildung der Temperaturabhängigkeit das Preisach-Modell erweitert. Beide Ansätze wurden nun mit Messwerten eines Aktors aus PIC 255 Material verglichen. Der Aktor (Länge 60 mm, Durchmesser 16 mm) ist mit 10 MPa vorgespannt und arbeitet gegen eine Steifigkeit von  $10 \text{ N}/\mu\text{m}$ . In der Simulation wird das in Abbildung 8.1 a) dargestellte elektrische Feld  $E$  mit einer maximalen Feldstärke von  $2 \text{ kV}/\text{mm}$  an den Aktor angelegt. Während der 25 Sekunden dauernden Simulation wird die mittlere Aktortemperatur  $\theta_{avg}$ , wie in Teilabbildung Abbildung 8.1 b) dargestellt, von  $20^\circ\text{C}$  auf  $140^\circ\text{C}$  erhöht. Die Teilabbildungen c) und d) zeigen die simulierten  $D - E$  und  $S - E$  Hysterese. Dunkelblau dargestellt sind die Ergebnisse des Ansatzes mit dem modifizierten Preisachoperator (Sim. I) und gelb gestrichelt die Ergebnisse des Überblendungsansatzes (Sim. II). Beide Ansätze liefern nahezu identische Ergebnisse und unterscheiden sich nur geringfügig. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass bei der Bestimmung der Modellparameter identische Messdaten zugrunde lagen. Des Weiteren sind Messwerte für mittlere Aktortemperaturen  $\theta_{avg}$  von  $20^\circ\text{C}$  und  $140^\circ\text{C}$  eingetragen. Diese stimmen gut mit den Simulationswerten bei  $20^\circ\text{C}$  und bei  $140^\circ\text{C}$  überein. Die Abweichungen zwischen Modell und Simulation liegen bei konstanter Aktortemperatur jeweils unterhalb von 5 %. Deshalb wird davon ausgegangen, dass beide Ansätze das thermische Aktorverhalten zufriedenstellend abbilden. Hinsichtlich der Rechenzeit ist jedoch der Ansatz mit dem modifizierten Preisachoperator

vorteilhaft, da im Gegensatz zum Superpositionsansatz nur ein Preisachoperator berechnet werden muss.

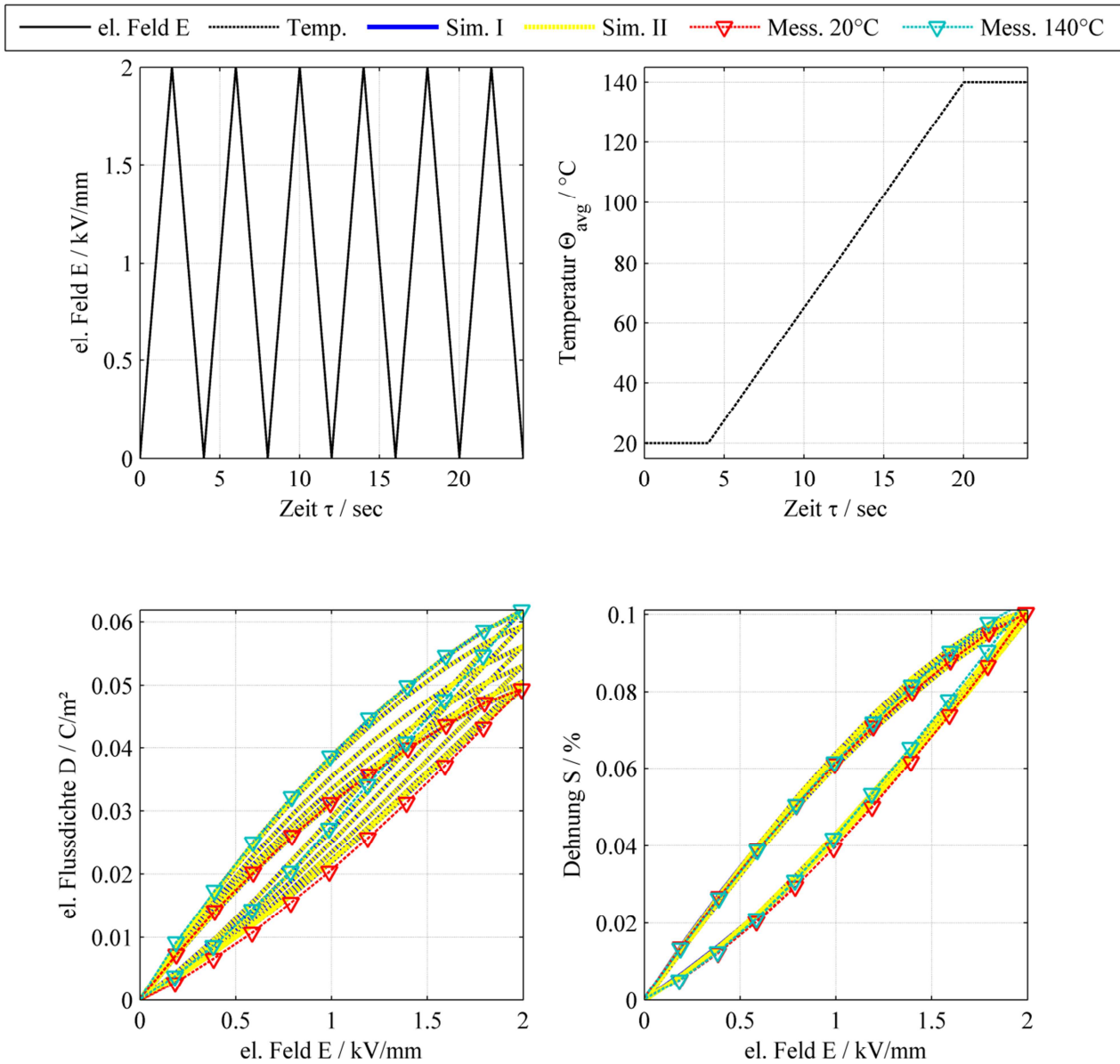


Abbildung 8.1 Validierung der Temperaturmodellierung [163].

### 8.1.2 Einfluss der linearen Modellparameter

Zur Untersuchung des Einflusses der linearen Koeffizienten  $s_3^E$ ,  $d_{33}$  und  $\epsilon_3$  des piezoelektrischen Modellteils wird die Modellqualität bei unterschiedlichen Umgebungssteifigkeiten verglichen. Verwendet wird ein Parametersatz, welcher bei konstanter mechanischer Spannung bzw. bei einer Federsteifigkeit von  $k_f = 0 \text{ N}/\mu\text{m}$  ermittelt wurde. Die Simulation und die Messwerte werden jedoch

bei einer Steifigkeit von  $k_f = 60 \text{ N}/\mu\text{m}$  durchgeführt. Somit weicht die mechanische Aktorbelastung zwischen Identifikations- und Simulationspunkt voneinander ab. Die Ergebnisse bei Verwendung der linearen Kleinsignalparameter sind in Abbildung 8.2 dargestellt. Es zeigt sich eine große Diskrepanz zwischen Messung und Simulation. Bei Vernachlässigung der nichtlinearen Anteile des Modells ergeben sich die blauen Linien mit x-Marker. Diese schmiegen sich bei einem elektrischen Feld von 0 kV/mm tangential an den ansteigenden Hystereseseast an (grüne Linien). Berücksichtigt man den nichtlinearen Modellteil ergeben sich die blauen Linien mit dem Rautemarker.

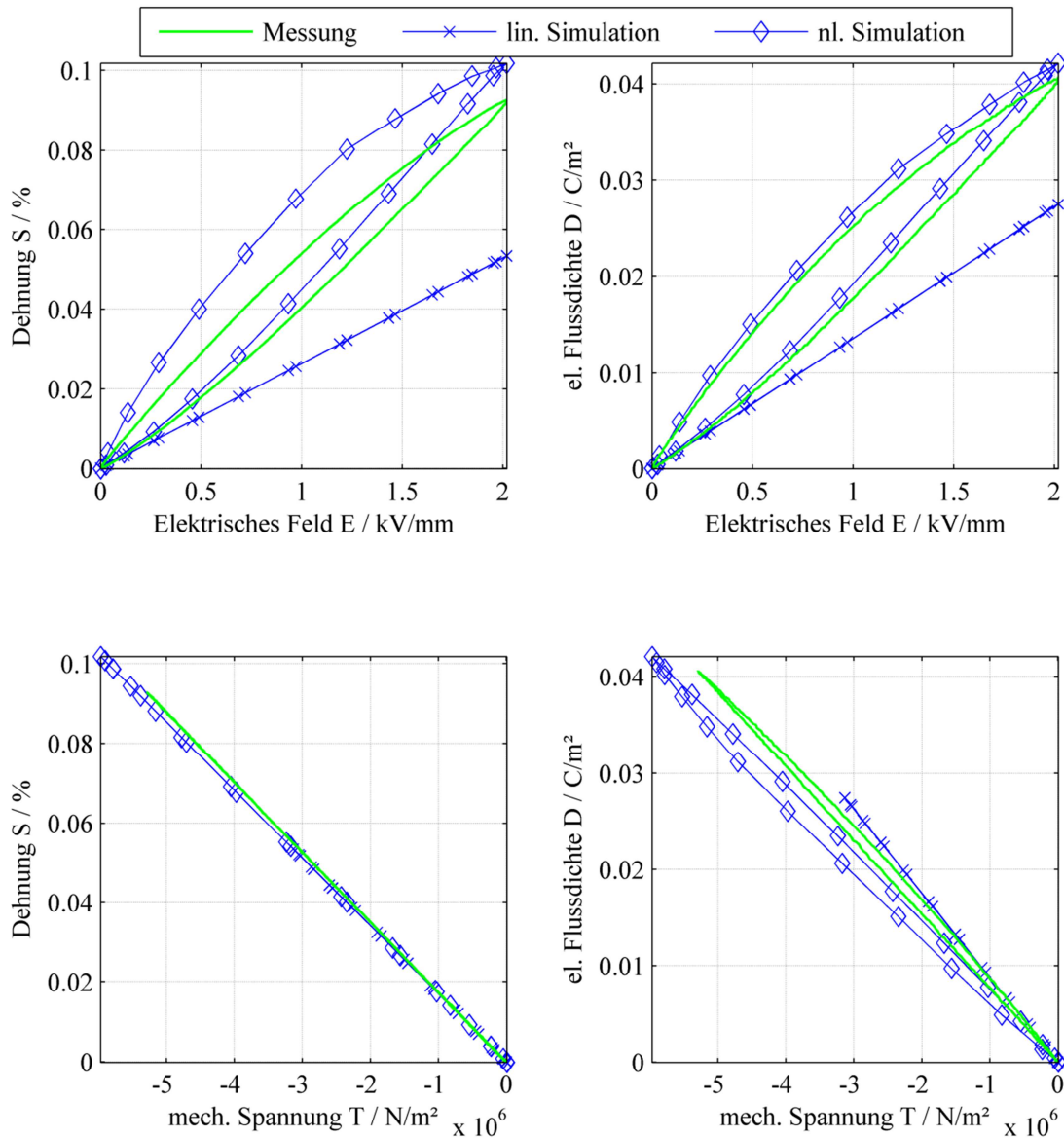


Abbildung 8.2 Vergleich von Simulation und Messung bei der Verwendung linearer Kleinsignalparameter und abweichender Umgebungssteifigkeit.

Der Betrag der maximalen Dehnung  $S$  sowie der maximalen elektrischen Flussdichte  $D$  wird jeweils vom Modell überschätzt. Ursache hierfür ist, dass die Lastabhängigkeit im nichtlinearen Modellteil vollständig vernachlässigt wird und dass die linearen Kleinsignalparameter diese nur ungenügend berücksichtigen. Somit liefert das beschriebene Modell bei Verwendung linearer Kleinsignalparameter nur dann gute Ergebnisse, wenn die im dynamischen Betrieb auftretende Belastung nur unwesentlich von der bei der Identifikation vorherrschenden Belastung abweicht.

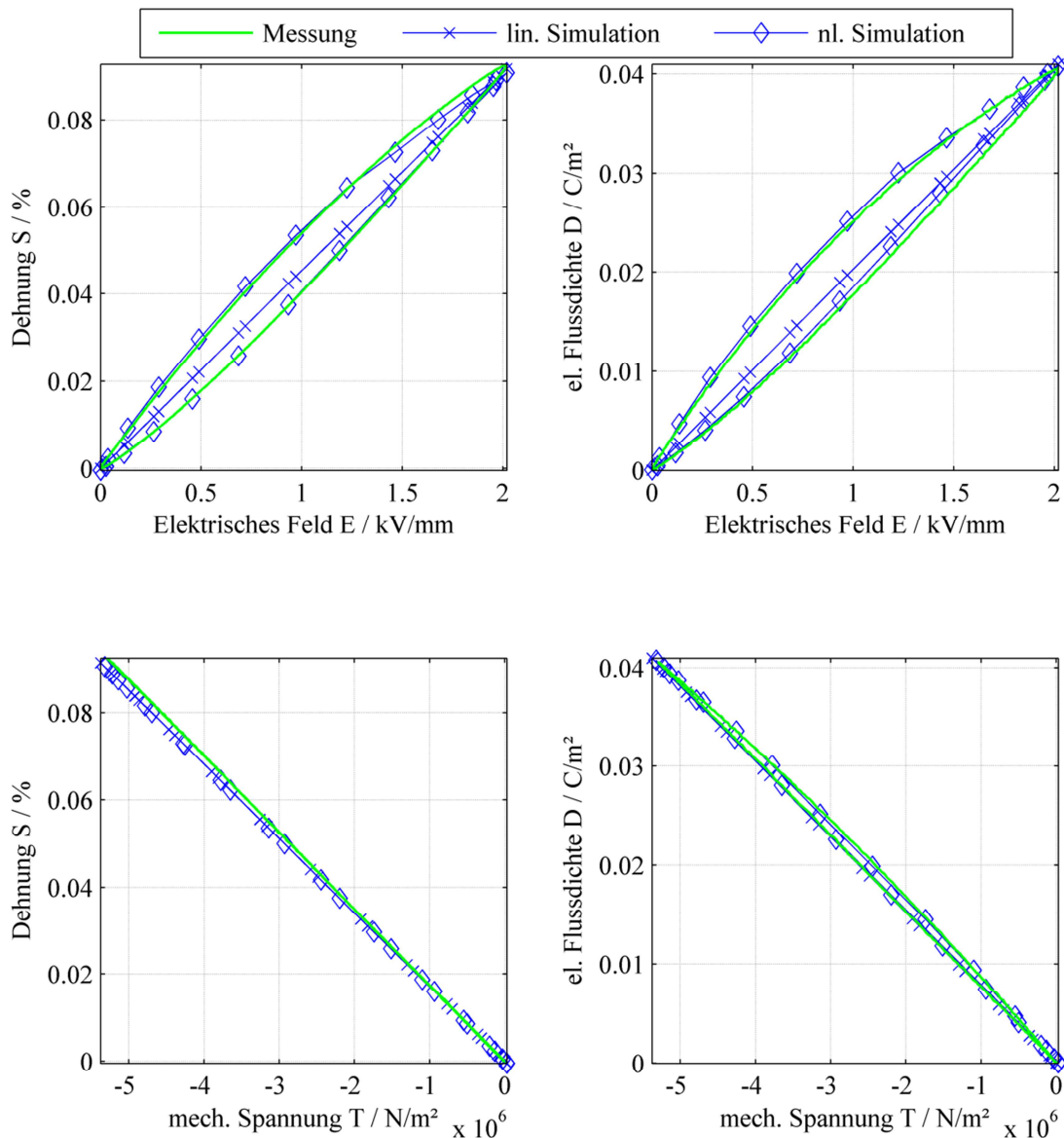


Abbildung 8.3 Vergleich von Simulation und Messung bei der Verwendung linearer Großsignalparameter und abweichender Umgebungssteifigkeit.

Die Simulationsergebnisse bei Verwendung der linearen Großsignalparameter sind in Abbildung 8.3 dargestellt. Hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der in blau mit Rautemarker

dargestellten nichtlinearen Simulation und der in grün dargestellten Messung. Bei Vernachlässigung des nichtlinearen Modellteils (blaue Linie mit X-Marker) wird alleine durch den linearen Teil des Modells die maximal auftretende Dehnung  $S$  und elektrische Flussdicht  $D$  richtig berechnet. Der nichtlineare Anteil des Modells ergänzt lediglich die Hysterese und trägt nicht zur Maximalamplitude bei. Somit lässt sich das vorgeschlagene Aktormodell bei Verwendung der linearen Großsignalparameter auch bei variabler Aktorbelastung einsetzen. Nachteilig bei der Verwendung der linearen Großsignalparameter ist, dass sich eine leicht asymmetrische  $D_{nl} - E$  Hysteresekurve ergibt. Das CPM bildet jedoch nur symmetrische Hystereseschleifen korrekt ab. Deshalb ergibt sich bei Verwendung der linearen Großsignalparameter im Identifikationspunkt ein etwas größerer Modellfehler. Somit lassen sich situationsabhängig mit der einen oder anderen Modellvariante bessere Ergebnisse erzielen. Das Modell unter Verwendung der linearen Kleinsignalparameter bietet dann Vorteile, wenn die mechanische Aktorbelastung nur wenig schwankt oder nur schwach von der bei der Parameteridentifikation vorherrschenden Belastung abweicht. Das Modell unter Verwendung der linearen Großsignalparameter liefert über einen erheblich größeren Lastbereich gute Ergebnisse. Es ist jedoch im Identifikationspunkt mit einem höheren Modellierungsfehler behaftet.

### 8.1.3 Modellgüte bei unregelmäßigen Signalen

Die bisher dargestellten Simulationen beschränken sich auf die äußeren Hystereseschleifen, da jeweils nach einem ansteigenden Signalanteil des elektrischen Feldes, zurück auf 0 V/m gefahren wurde. Bei Anwendungen der aktiven Schwingungsbeeinflussung ist dies jedoch nicht der Fall, da das an den Aktor angelegte elektrische Feld  $E_{(\tau)}$  unregelmäßig um einen Mittelwert schwankt. Deshalb entstehen nicht nur äußere Hystereseschleifen, sondern auch Unterschleifen. Um die Modellgüte bei solchen Eingangsgrößen zu untersuchen, wird an einen Aktor aus PIC 255 Material (Durchmesser: 25 mm, Länge: 60 mm) das in Abbildung 8.4 a) dargestellte elektrische Feld  $E_{(\tau)}$  angelegt, welches durch

$$E_{(\tau)} = e_1 \sin(2\pi f_1 \tau) + e_2 \sin(f_2 \tau) + e_3 \sin(f_3 \tau) + \frac{1 \text{ kV}}{\text{mm}} \quad (8.1)$$

mathematisch beschrieben ist. Die Amplituden der Schwingungen liegen bei  $e_1 = 0,3 \text{ kV/mm}$ ,  $e_2 = 0,5 \text{ kV/mm}$  und  $e_3 = 0,25 \text{ kV/mm}$  und die Frequenzen sind  $f_1 = 9 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 20 \text{ Hz}$  und  $f_3 = 33 \text{ Hz}$ . Somit handelt es sich um ein periodisches Signal mit einer Periodendauer von  $T$  gleich einer Sekunde. Die gewählte Signalform ist prinzipiell zufällig gewählt. Sie weist aber typische Charakteristika der bei aktiven Schwingungsminderungsanwendungen auftretenden Signale auf. Der Lastaktor erzeugte während der Messungen eine Umgebungssteifigkeit von  $20 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Eine Gegenüberstellung der simulierten und gemessenen Aktordehnung ist Abbildung 8.4 b) zu entnehmen. Qualitativ stimmen beide Signale sehr gut überein. Quantitativ kommt es aber zu deutlichen Abweichungen. Der relative Fehler (bezogen auf den Maximalwert des Signals) beträgt, wie in Teilabbildung d) rot dargestellt, bis zu 13 %. Ein ähnliches Bild ergibt sich auch bei der



elektrischen Flussdichte  $D$ , welche einen relativen Fehler von bis zu 15 % aufweist.

Ursache für die nun erheblich größeren Abweichungen ist, dass das verwendete CPM nur auf äußere Hysteresekurven angepasst werden kann. Die Anpassung auf Umkehrkurven höherer Ordnung ist beim CPM prinzipiell nicht möglich. Es gibt zwar Modellerweiterungen, welche die Berücksichtigung innerer Hystereseschleifen zulassen, jedoch ist dann die zur Berechnung der Aktivverluste notwendige energetische Interpretation des CPM nicht mehr möglich [35]. Somit zeigt sich an dieser Stelle eine prinzipielle Schwäche des vorgeschlagenen Modellansatzes.

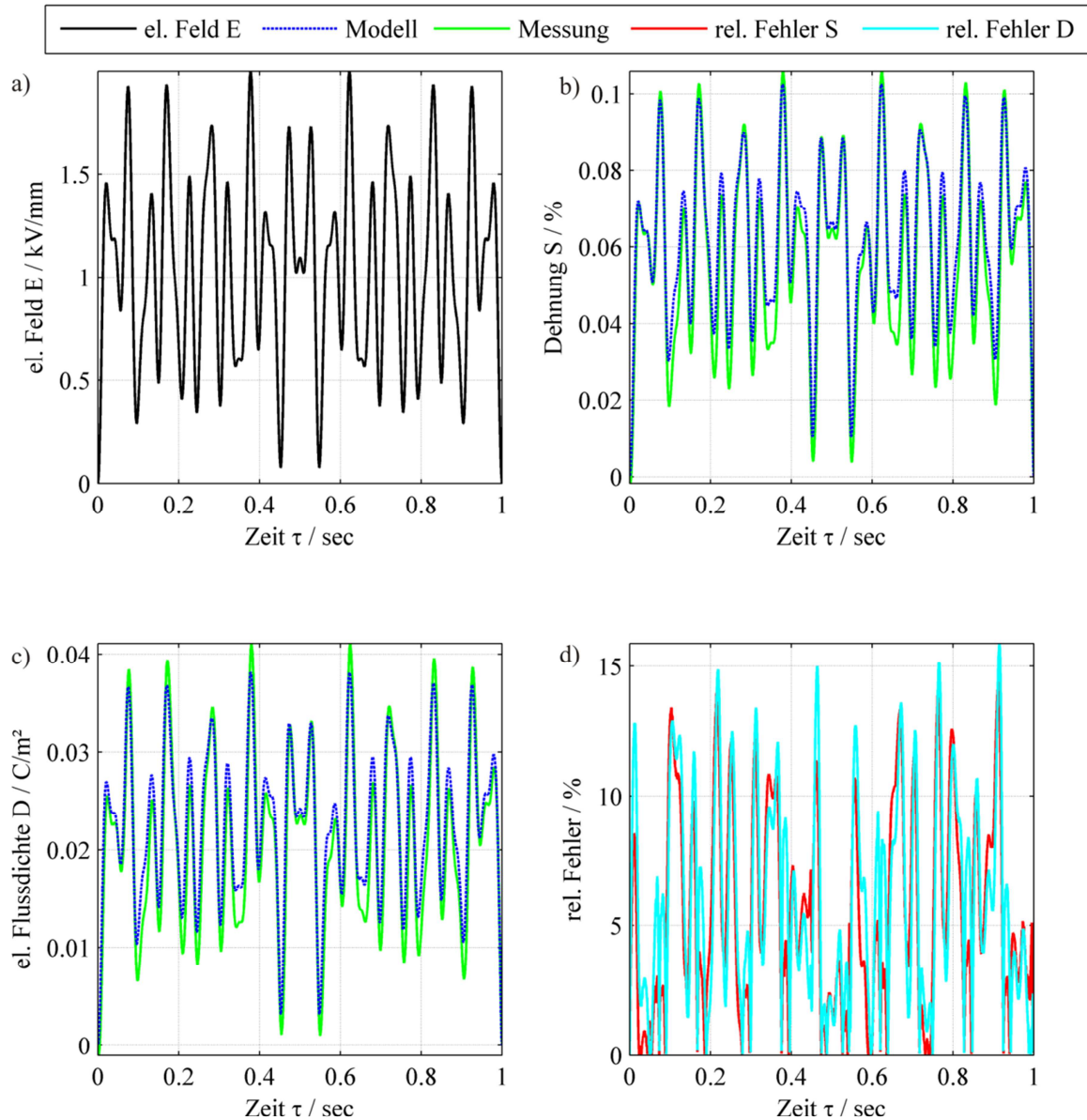


Abbildung 8.4 Vergleich von Messung und Simulation bei mehrfrequenter Anregung [163].



Neben der Abbildung der hysteresebehafteten Ausgangsgrößen des Modells sind die energetischen Aspekte für das piezoelektromechanische Gesamtmodell von großer Bedeutung. In dem hier betrachteten Fall wird aufgrund der linearen Charakteristik des Prüfstandes im Mittel über eine Periode betrachtet keine mechanische Arbeit verrichtet. Auch die auf die kapazitiven Eigenschaften des Aktors zurückgehende Blindleistung ist im periodischen Mittel gleich Null. Somit entspricht die dem Aktor zugeführte Wirkleistung in dem hier betrachteten Sonderfall der Verlustleistung des Aktors. Deshalb lässt sich die Verlustarbeit aus der zeitlichen Integration der momentanen Akteurleistung  $P_{sim(t)}$  berechnen. Für den mittleren Verlust gilt folglich

$$W_{loss,avg} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{sim(\tau)} dt. \quad (8.2)$$

Aus der nach Gleichung (5.6) berechneten elektrischen Flussdichte  $D_3$  ergibt sich der momentane Akteurstrom durch zeitliches Ableiten und Multiplizieren mit der Gesamtelektrodenfläche  $A_{el,ges}$

$$i_{sim(\tau)} = \frac{dD_3}{dt} A_{el,ges}. \quad (8.3)$$

Dieser Strom berücksichtigt bereits mechanische Wechselwirkungen zwischen Aktor und Umgebung und schließt deshalb sowohl dielektrische als auch piezoelektrische Verluste mit ein. Durch Multiplikation des berechneten Stromes mit der am Aktor anliegenden elektrischen Spannung ergibt sich die für Gleichung (8.2) benötigte elektrische Leistung zu

$$P_{sim(\tau)} = i_{sim(\tau)} u_{(\tau)}. \quad (8.4)$$

Ein Vergleich der gemessenen und der simulierten Verlustleistung wird in Abbildung 8.5 a) gegeben. Die simulierte Momentanleistung wurde unter Verwendung der Gleichungen (8.3) und (8.4) aus der simulierten elektrischen Flussdichte und dem angelegten elektrischen Feld berechnet. Es treten sowohl positive als auch negative elektrische Momentanleistungen auf, was darauf zurückzuführen ist, dass bei ansteigendem elektrischem Feld dem Aktor Energie zugeführt wird, welche bei abfallendem elektrischem Feld teilweise wieder abfließt. Ein Vergleich der gemessenen und simulierten elektrischen Leistung ergibt qualitativ eine gute Übereinstimmung. Quantitativ stellt sich jedoch, wie in Teilabbildung b) dargestellt, teilweise ein relativer Fehler von bis zu 20 % ein. Meistens liegt der Fehler jedoch unterhalb von 10 %. In rot ist die vom CPM vorhergesagte, nach Gleichung (5.10) berechnete, elektrische Momentanverlustleistung dargestellt. Diese ist deutlich kleiner als die momentane elektrische Leistung, was schlüssig ist, da große Teile der dem Aktor zugeführten Energie wieder abgeführt werden. Teilabbildung c) stellt die seit Beginn der Periode des elektrischen Feldes zeitlich integrierten elektrischen Momentanleistungen  $P_{(\tau)}$  dar

$$W_{(\tau)} = \int_0^{\tau} P_{(\tau)} d\tau. \quad (8.5)$$

Die hellgrüne Linie ergibt sich durch Einsetzen der gemessenen elektrischen Momentanleistung in Gleichung (8.5). Die Schwankungen sind auf die positiven und negativen Momentanleistungen

zurückzuführen. Die dielektrischen Aktorverluste zeigen sich dadurch, dass die elektrische Arbeit  $W_{mess}(\bar{\tau})$  diskontinuierlich ansteigt. Nach einer Periode des elektrischen Feldes, also zum Zeitpunkt  $\bar{\tau} = 1 \text{ sec}$ , lässt sich eine energetische Bilanz ziehen. Der Wert von  $W_{mess}(\bar{\tau}=1)$  entspricht der dissipierten elektrischen Arbeit. Die simulierte elektrische Arbeit, welche durch zeitliche Integration der simulierten Leistung berechnet wurde, stimmt qualitativ gut mit der gemessenen elektrischen Arbeit überein. Die Abweichungen liegen erneut im Bereich von ca. 15 %. Die rote Linie geht aus der zeitlichen Integration der vom CPM vorhergesagten Verlustleistung hervor. Sie steigt kontinuierlich an und schmiegt sich von unten an die beiden anderen Kurven an. Ein Vergleich der aus der Verlustarbeit berechneten elektrischen Energie mit dem aus der Messung hervorgehenden Wert zum Zeitpunkt  $\tau = 1 \text{ sec}$  ergibt eine gute Übereinstimmung. Somit ist nachgewiesen, dass das CPM die elektrische Verlustleistung, welche als Eingangsgröße für das thermische Modell benötigt wird, qualitativ gut abbildet. Quantitativ ergeben sich Abweichungen von ca. 15 %, so dass hier noch Verbesserungspotential besteht.

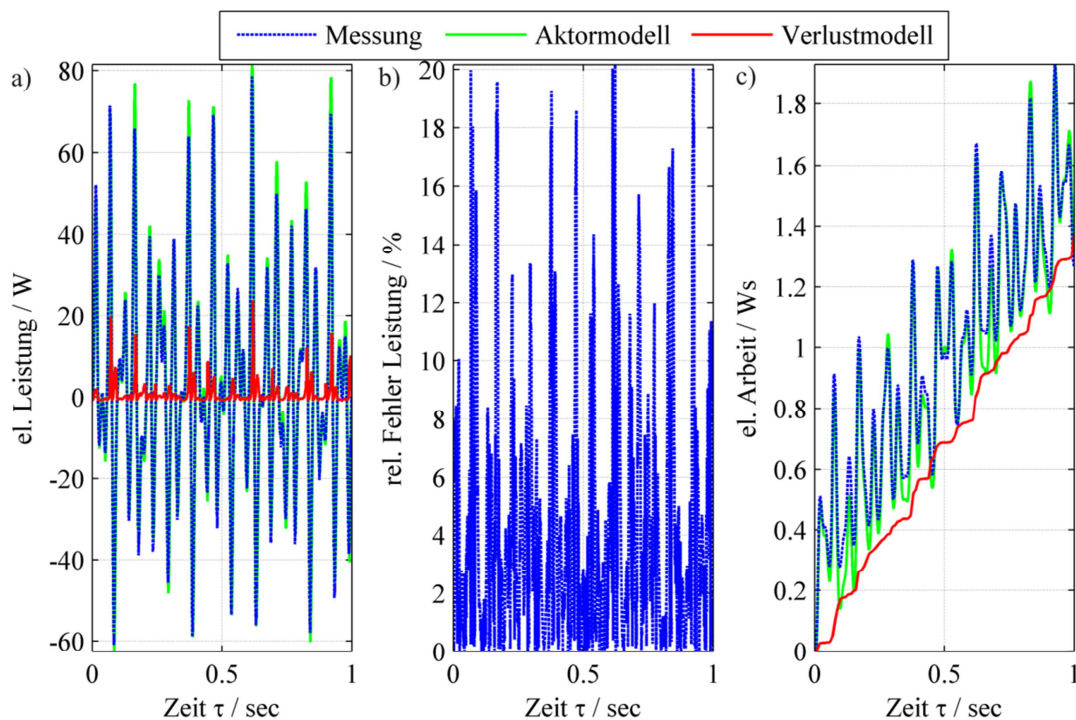


Abbildung 8.5 Vergleich der simulierten und gemessenen Aktorleistung.

## 8.2 Validierung des thermischen Modellteils

Die Validierung des thermischen Modellteils erfolgt mittels Messdaten eines transienten Aufheiz- und Abkühlvorganges. Zur Erzeugung der Verlustleistung während der Experimente wurde wiederum die Verlustleistungsregelung verwendet. Der Wärmestrom über die Aktoraufstandsflächen wird mittels einer Neumann Randbedingung und den gemessenen axialen Wärmeströmen abgebildet. An der Mantelfläche wird der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{ges}$  mit Näherungsgleichung (6.16) und den in Kapitel 7.2 dargestellten Parametern berechnet. Zur

Beurteilung der Modellqualität wird ein auf dem normierten mittleren quadratische Fehler basierender (NRMSE; normalized root mean square error) Gütewert angegeben. Der NRMSE ist gegeben durch

$$NRMSE = \frac{\|\Theta_{sim(\tau_i)} - \Theta_{mess(\tau_i)}\|_2}{\|\Theta_{mess(\tau_i)} - \bar{\Theta}_{mess}\|_2}. \quad (8.6)$$

Hierin entspricht  $\Theta_{sim(\tau_i)}$  dem Vektor der simulierten Temperaturen an einer Sensorposition für die Zeitpunkte  $\tau_i$  und  $\Theta_{sim(\tau_i)_{mess(\tau_i)}}$  den korrespondierenden Messwerten.  $\bar{\Theta}_{mess}$  entspricht dem arithmetischen Mittelwert der Messwerte an der entsprechenden Sensorposition. Der Gütewert ergibt sich aus dem NRMSE mit

$$fit = 100\% \cdot (1 - NRMSE). \quad (8.7)$$

Dieser kann Werte zwischen minus unendlich und 100 % annehmen, wobei 100 % einer exakten Übereinstimmung von Simulation und Messung entspricht.

Ein Vergleich zwischen einem transienten Aufheizvorgang eines Aktors aus PIC 151 Material mit Simulationen in Ansys und Matlab ist in Abbildung 8.6 dargestellt. Teilabbildung a) zeigt die dem Aktor zugeführte Wärme. Die Teilabbildungen b) bis d) vergleichen die gemessenen Temperaturen mit den Simulationen. Die Messwerte sind jeweils blau, das Ergebnis von Ansys grün und das von Matlab rot dargestellt. Insgesamt ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Die absoluten Abweichungen sind stets kleiner 3 °C. Dies zeigt sich auch in den fit-Werten, welche bei rund 90 % liegen. Die in Matlab durchgeführten Simulationen weisen einen geringfügig schlechteren fit-Wert auf als die Simulationen in Ansys. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass der Berechnungsfehler in Matlab etwas größer ist. Dies ist zum einen darin begründet, dass ein gröberes numerisches Gitter verwendet wurde, zum anderen wurden lineare Dreieckselemente verwendet, welche schlechtere numerische Eigenschaften als die in Ansys verwendeten Viereckselemente haben.

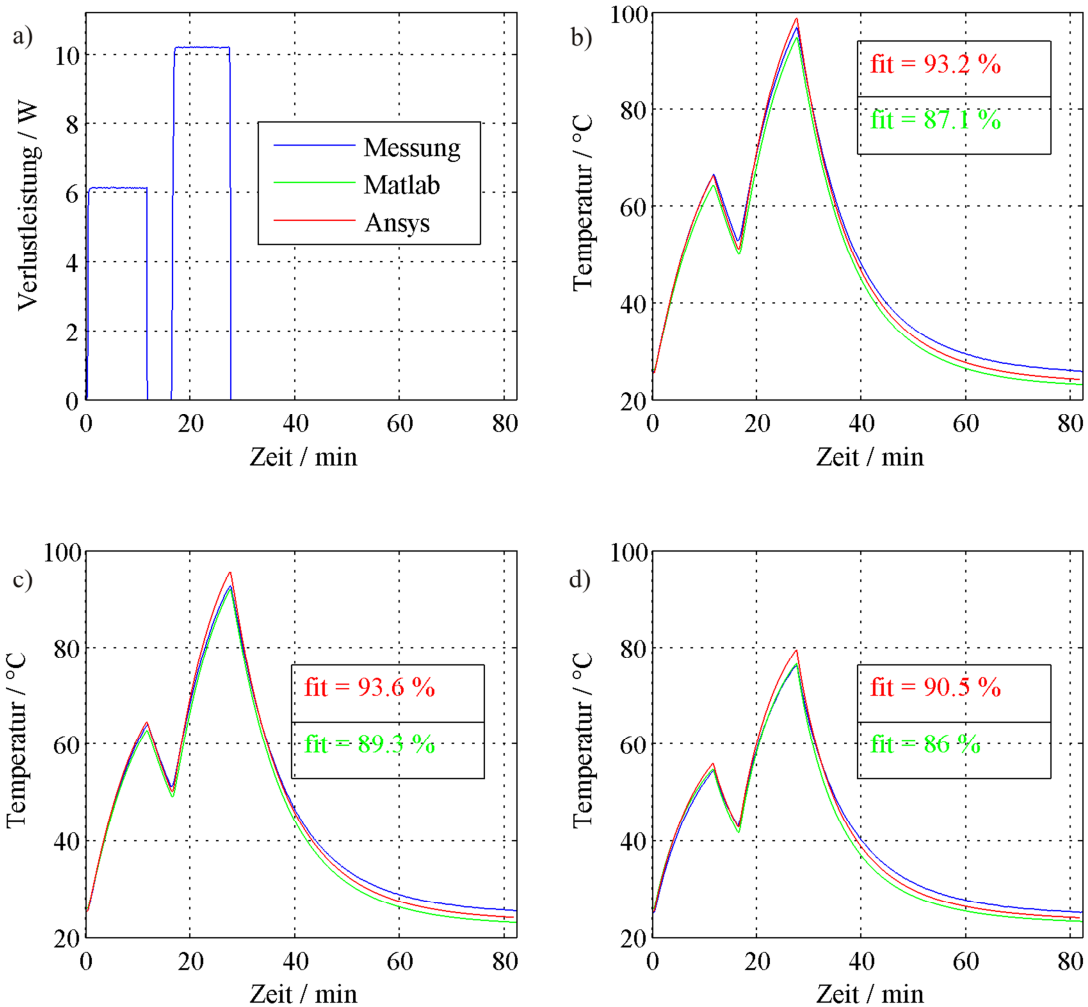


Abbildung 8.6 Vergleich zwischen simulierter und gemessener Eigenerwärmung eines Aktors aus PIC 151 Material. a) Verlustleistung b) Temperatur Kern ( $r=0\text{mm}$ ,  $h=l/2$ ) c) Temperatur Oberfläche Mitte ( $r=12.5\text{mm}$ ,  $h=l/2$ ) d) Temperatur Oberfläche unten ( $r=12.5\text{mm}$ ,  $h=l/6$ ).

Abbildung 8.7 vergleicht die Messung eines Aufheizvorgangs eines Aktors aus PIC 255 mit simulierten Werten. Insgesamt ergibt sich ein sehr ähnliches Bild wie bei der vorherigen Simulation mit einer ähnlich guten Übereinstimmung zwischen Modell und Simulation. Deshalb ist davon auszugehen, dass sich mit den gefundenen Materialparametern und dem verwendeten Modell das thermische Aktorverhalten gut abbilden lässt.

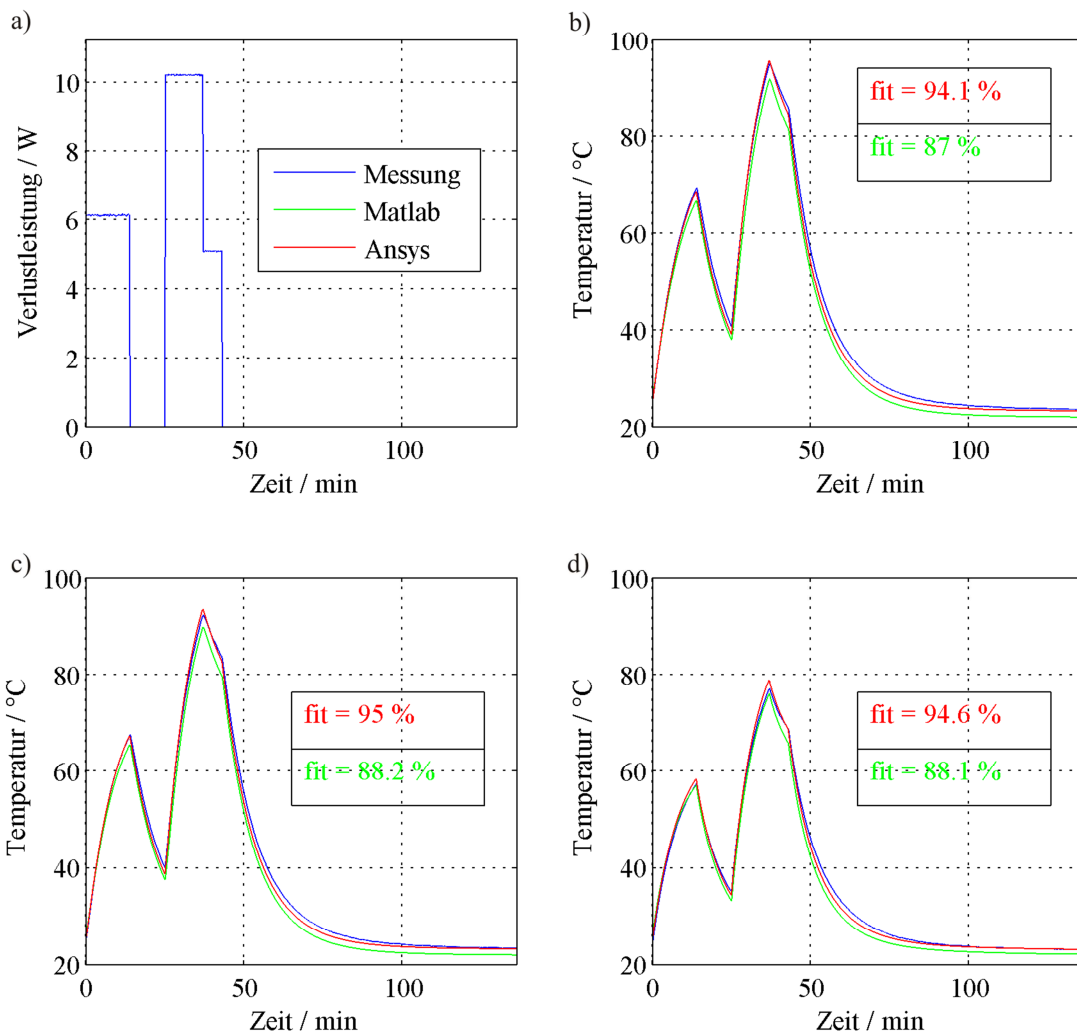


Abbildung 8.7 Vergleich zwischen simulierter und gemessener Eigenerwärmung eines Aktors aus PIC 255 Material. a) Verlustleistung b) Temperatur Kern ( $r=0\text{mm}$ ,  $h=l/2$ ) c) Temperatur Oberfläche Mitte ( $r=12,5\text{mm}$ ,  $h=l/2$ ) d) Temperatur Oberfläche unten ( $r=12,5\text{mm}$ ,  $h=l/6$ ).

### 8.3 Kritische Hinterfragung des gewählten Modellansatzes

An dieser Stelle werden die Einschränkungen des gewählten Modellansatzes erläutert. Zunächst wird der piezoelektrische und anschließend der thermische Modellteil analysiert.

Der piezoelektrische Modellteil hat eingeschränkte Allgemeingültigkeit hinsichtlich der gefundenen Modellparameter. Prinzipiell lässt sich das vorgeschlagene Aktormodell auf andere Aktorgeometrien skalieren, was dadurch deutlich wird, dass in den Modellgleichungen (5.16) und (5.17) nur auf die Aktorgeometrie bezogene Größen vorkommen. Der Einfluss der Aktoreinspannung wird jedoch nur dann korrekt wiedergegeben, wenn das Verhältnis von Aktorhöhe zu Aktordurchmesser beibehalten

---

wird. Verwendet man nun die hier mit einer Aktorlänge von 60 mm bestimmten Modellparameter beispielsweise für einen sehr kurzen Aktor, bei welchem die durch die Einspannung hervorgerufene Dehnungsbehinderung einen sehr viel größeren Effekt hat, so unterschätzt das Modell den Einfluss der Einspannung auf das Gesamtverhalten. Somit besteht eine zusätzliche Fehlerquelle bei der Skalierung des gefundenen Aktormodells auf andere Aktorgeometrien. In diesem Fall ist dann eine Neuentifizierung der Modellparameter notwendig. Dieser Skalierungsfehler sollte jedoch bei üblichen Aktordimensionen klein sein.

Ebenfalls kritisch ist die Übertragbarkeit der gefundenen Parameter auf andere Umgebungssteifigkeiten beziehungsweise andere mechanische Belastungen. Dies gilt insbesondere bei Verwendung linearer Kleinsignalparameter, da diese, wie in Abschnitt 8.1.2 erläutert, nur für die bei der Identifikation vorherrschende Umgebungssteifigkeit Gültigkeit haben. Bei Verwendung der linearen Großsignalparameter ist die Modellübertragbarkeit besser möglich. Jedoch wird bei dem in Kapitel 3.6 beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Großsignalnachgiebigkeitskonstante  $s_{g,33}$  die endliche Steifigkeit des Aktoraufstandspunktes mitberücksichtigt. Weicht diese in der realen Einbausituation des Aktors stark von der des verwendeten Prüfstandes ab, so führt dies zu Ungenauigkeiten. Deshalb sollte in zukünftigen Arbeiten eine genauere Messung der Aktordehnung mit z. B. zwei Positionssensoren angestrebt werden. Dann kann die endliche Steifigkeit des Aktoraufstandspunktes, in dem den Aktor umgebenden mechanischen Modell, mitberücksichtigt werden.

Hinzu kommt, dass der experimentelle Aufwand zur Gewinnung eines vollständigen Parametersatzes für ein piezoelektrisches Material hoch ist. Bei Berücksichtigung von Temperatur und mechanischer Vorspannung sind schnell fünfzig oder mehr Messungen notwendig. Nach Ansicht des Autors ist dieser Aufwand jedoch aufgrund des erheblichen Zusatznutzens und der wenn auch nur eingeschränkt vorhandenen Skalierbarkeit des Modells gerechtfertigt.

Die Lastabhängigkeit wird nur in linearer Form berücksichtigt. Somit ergeben sich im Modell, bei unterschiedlichen mechanischen Lasten und identischen elektrischen Feldern, identische Hysteresekurven und somit identische Aktorverluste. Wie jedoch die in Abbildung 4.16 rechts dargestellte Verlustauswertung bei unterschiedlichen Umgebungssteifigkeiten zeigt, hängen die Verluste auch von der mechanischen Aktorbelastung ab. Dieser Effekt wird vom Modell nicht abgebildet. Die Abhängigkeiten der Verluste von der Temperatur sowie von der mechanischen Vorspannung sind jedoch im Modell berücksichtigt.

Außerdem ist anzumerken, dass das verwendete CPM nur unter Berücksichtigung äußerer Hystereseschleifen parametrisiert wird. Innere Hystereseschleifen werden vom Modell zwar stets qualitativ richtig berechnet, eine Aussage über den dann auftretenden Modellfehler lässt sich jedoch nicht machen. Wie im Literaturüberblick dargestellt, gibt es Modellerweiterungen für das CPM, welche die Berücksichtigung innerer Hystereseschleifen zulassen. Jedoch geht dann die Verlustleistungsvorhersageeigenschaft des Preisach-Hysteresemodells verloren. Somit können diese Erweiterungen nicht verwendet werden, da dann die Eingangsgröße für das thermische Modell nicht berechnet werden kann.

Beim thermischen Modellteil fällt trotz Ausnutzung der geometrischen Symmetrien der recht hohe

---

Berechnungsaufwand negativ ins Gewicht. In jedem Berechnungsschritt sind Matrix-Vektor Multiplikationen mit einigen hundert Gleichungen durchzuführen. Dies nimmt den Großteil der Simulationszeit in Anspruch. Eine modale Reduktion des thermischen Aktormodells, welche den Berechnungsaufwand erheblich reduzieren würde, ist nur eingeschränkt möglich. Dies ist darin begründet, dass es sich aufgrund der temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten an der Oberfläche um ein zeitvariantes System handelt. Eine modale Reduktion ist jedoch nur bei zeitinvarianten Modellen ohne weiteres möglich. Somit muss im Falle einer Reduktion vereinfachend von einem konstanten Wärmeübergangskoeffizienten ausgegangen werden, was jedoch einen zusätzlichen Modellfehler generiert. Abhilfe liefert gegebenenfalls das in [172] vorgestellte Verfahren, welches eine Modellreduktion auch bei temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten ermöglicht. Alternativ kann zum vorgeschlagenen zweidimensionalen thermischen Aktormodell auch ein Punktmassenmodell verwendet werden. In einem solchen Modell wird jedoch der Temperaturverlauf innerhalb des Aktors nicht abgebildet, so dass keine Aussage über die maximale Aktortemperatur möglich ist.

Ebenfalls kritisch zu bewerten ist der relativ große Bestimmungsfehler bei der Ermittlung der Parameter des thermischen Modells. Dieser ist darauf zurückzuführen, dass zum einen eine relativ große Anzahl von Sensoren benötigt wird und zum anderen, dass das Verfahren sehr sensitiv auf einzelne Messfehler reagiert. Für eine genauere Bestimmung sollte deshalb in zukünftigen Arbeiten ein Messaufbau gewählt werden, welcher größere Temperaturgradienten aufweist und somit geringere Anforderungen an die Messtechnik stellt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es mehrere Einschränkungen hinsichtlich des vorgeschlagenen Modells gibt. Keine dieser Einschränkungen ist jedoch so erheblich, dass sie die allgemeine Anwendbarkeit des Modells grundsätzlich einschränkt.





---

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

---

Dieses Kapitel schließt die Arbeit ab. In Abschnitt 9.1 erfolgt ein Abgleich der Ergebnisse mit den zum Beginn der Arbeit formulierten Zielen. Anschließend wird in Abschnitt 9.2 ein Ausblick auf zukünftige Arbeiten gegeben.

---

### 9.1 Gegenüberstellung von Ergebnissen und Zielen

---

Ein Vergleich der im Abschnitt 1.2 definierten Ziele mit den vorgestellten Ergebnissen ergibt, dass die Ziele abgesehen von geringen Einschränkungen vollständig erreicht wurden.

Es wurde ein Modellansatz definiert, welcher die wesentlichen nichtlinearen Effekte berücksichtigt sowie eine Berechnung der Eigenerwärmung des Aktors ermöglicht. Als wesentliche nichtlineare Effekte wurden die Abhängigkeiten vom elektrischen Feld  $E$  und von der Aktortemperatur  $\Theta$  berücksichtigt. Die Lastabhängigkeit des Aktorverhaltens wird nur in linearer Form berücksichtigt. Die Frequenzabhängigkeit des Aktors wird vernachlässigt, so dass sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Frequenz des angelegten elektrischen Feldes und den Aktorverlusten ergibt. So entsteht ein vollständiges selbstkonsistentes Modell, welches die thermoelektromechanische Simulation von Piezostapelaktoren ermöglicht.

Zur Ermittlung der notwendigen Modellparameter wurden Identifikationsroutinen erarbeitet. Die praktische Anwendbarkeit dieser Routinen wurde anhand von drei unterschiedlichen Aktormaterialien nachgewiesen.

Das Modell ist aufgrund der phänomenologischen Vorgehensweise nur im experimentell abgedeckten Parameterraum gültig. Die durchgeführten Untersuchungen decken jedoch den gesamten typischen Arbeitsbereich von Piezostapelaktoren ab, so dass dies keine wesentliche Einschränkung darstellt.

Aufgrund der angewendeten Vereinfachungen besteht jedoch Potential hinsichtlich der Modellgüte. Wie in Kapitel 8 dargestellt, können Modellierungsfehler in der Größenordnung von 15-20 % auftreten. Bei Verwendung der bisher üblichen linearen Kleisignalparameter treten jedoch Fehler von über 200 % auf, so dass der vorgeschlagene Modellansatz erhebliche Vorteile bringt. Möchte man eine höhere Modellqualität erreichen, ist ein wesentlich komplexeres Modell notwendig, was die Rechenzeiten signifikant erhöhen würde. Höhere Simulationszeiten schränken die Durchführbarkeit von mechatronischen Gesamtsystemsimulationen stark ein. Deshalb ist der gewählte Modellansatz als guter Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und Berechnungsdauer aufzufassen.

Trotz der in Abschnitt 8.3 zusammengefassten Einschränkungen lässt sich das Modell bereits in den meisten realtypischen Fällen zur Simulation piezoaktiver, mechatronischer Systeme einsetzen. Wesentliche Alleinstellungsmerkmale des Modells sind die Anwendbarkeit bei beliebigen elektrischen Eingangssignalen sowie die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit. Dem Autor ist kein weiteres Modell bekannt, welches diese für aktive Schwingungsminderungsanwendungen

besonders wichtigen Einflüsse mit vergleichbarer Genauigkeit darstellt. Somit steht mit dem vorgeschlagenen Modell ein Werkzeug zur simulativen Auslegung piezoaktuierter Gesamtsysteme unter Berücksichtigung der durch die Eigenerwärmung festgelegten Betriebsgrenzen zur Verfügung. Mit dem entwickelten Modell lässt sich, wie in Abbildung 9.1 dargestellt, die in der Einleitung erwähnte Problemstellung der aktiven Schwingungsdämpfung von Flugtriebwerken, ein thermomechanisches Triebwerksmodell vorausgesetzt, am Rechner abbilden. Das thermomechanische Triebwerksmodell sollte sowohl das mechanische Schwingungsverhalten als auch die im Triebwerk herrschenden Temperatur abbilden. Die Schnittstelle zwischen dem mechanischen Teil des Triebwerksmodells und dem piezoelektrischen Aktormodell stellen die mechanische Spannung  $T_3$  und die Aktordehnung  $S_3$  dar. Die mechanische Aktorspannung  $T_3$  lässt sich unter Berücksichtigung der Querschnittsfläche des Aktors in eine Schnittkraft umrechnen. Die vom mechanischen Teil des Triebwerksmodells berechneten Auslenkungen dienen als Eingangsgröße für den Regler und den piezoelektrischen Aktormodellteil. Die vom Triebwerksmodell berechneten Temperaturen werden als Randbedingungen für den thermischen Modellteil des Aktormodells verwendet. Zur Abbildung der Leistungselektronik wird der durch den Aktor fließende Strom benötigt, welcher sich aus der berechneten elektrischen Flussdichte  $D_3$  durch zeitliches Differenzieren und anschließendes multiplizieren mit der Gesamtelektrodenfläche des Aktors berechnen lässt. So entsteht ein in sich geschlossenes Gesamtsystemmodell, welches eine vollständige Dimensionierung des aktiven Systems am Rechner zulässt.

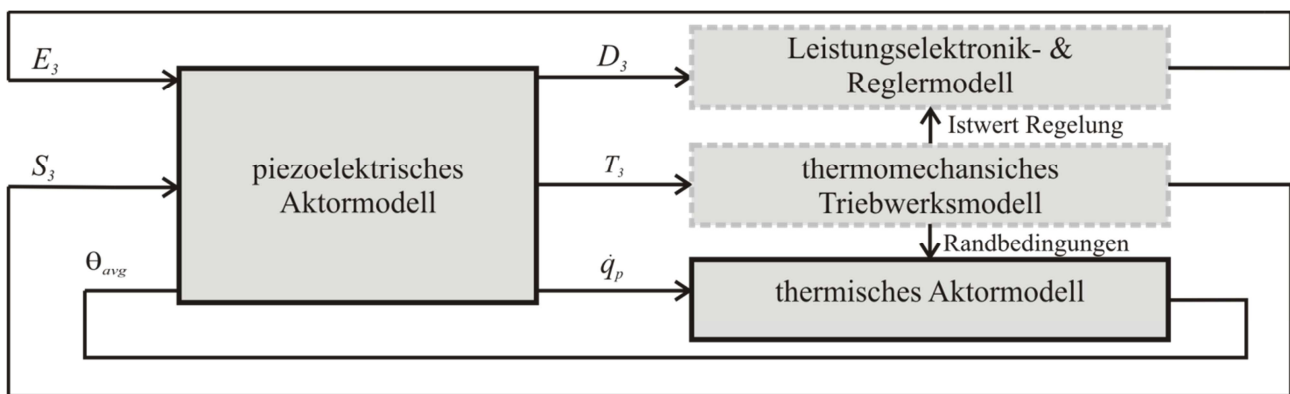


Abbildung 9.1 Blockschaltbild einer mechatronischen Gesamtsystemsimulation am Beispiel eines aktiv gelagerten Flugtriebwerksrotors.

Welches der untersuchten Materialien sich an besten für eine konkrete aktive Schwingungsbeeinflussungsaufgabe einsetzen lässt, ist pauschal nicht zu beantworten. Aktoren auf PIC 151 Material weisen bei gleicher Geometrie den größten Hub auf. Deshalb können diese bei stark limitiertem Bauraum oder Gewichtsbeschränkungen die bestmögliche Lösung darstellen. Aktoren aus PIC 255 Material stellen einen ausgewogenen Kompromiss zwischen hohem Stellweg bei gleichzeitig moderaten Verlusten dar. Solche Aktoren liefern in einer Vielzahl von Anwendungen gute Ergebnisse. Die Aktoren aus PIC 181 Material weisen die geringsten Stellwege bei gleichzeitig

---

sehr geringen Verlusten auf. Die geringen Verluste ermöglichen besonders hohe Betriebsfrequenzen bei hohen elektrischen Feldstärken. Jedoch steigen die Verluste bei PIC 181 mit der Aktortemperatur prozentual gesehen besonders stark an. Deshalb reduziert sich der Vorteil gegenüber PIC 255 bei gleichem gefordertem Stellweg und Bauraum bei erhöhten Temperaturen erheblich. Die unterschiedlichen Curie-Temperaturen der Keramiken spielen nur eine untergeordnete Rolle, da bereits ab ca. 150 °C Isolationsprobleme auftreten [22]. Die Aktoren aus Keramiken mit höheren Curie-Temperaturen können deshalb ihre potentiell vorhandenen Vorteile nicht ausnutzen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine optimale Aktordimensionierung nur unter Berücksichtigung des mechatronischen Gesamtsystems möglich ist. Dies gilt insbesondere deshalb, da der gewählte Regelungsalgorithmus die benötigte Aktorstellgröße maßgeblich beeinflusst und somit indirekt auch die Aktorverluste und –temperatur bestimmt. Ein geeignetes Modell für solche Gesamtsystemsimulationen steht nun zur Verfügung. So lässt sich unter der Berücksichtigung aller wesentlichen Aspekte die optimale Konfiguration für das aktive System finden.

---

## 9.2 Ausblick

---

Dieser Ausblick beginnt mit Anknüpfungspunkten, welche sich direkt aus dieser Arbeit ergeben und geht dann zu allgemeineren Sachverhalten über.

Ein erster Ansatz für zukünftige Arbeiten ergibt sich wie in Abschnitt 9.1 angesprochen aus dem noch vorhandenen Potential hinsichtlich der Modellgenauigkeit. Die Genauigkeit ist zum einen auf die gemachten Vereinfachungen aber auch teilweise auf das gewählte Verfahren zur Bestimmung der Parameter des piezoelektrischen Modells zurückzuführen. So lässt sich durch Verwendung eines Optimierungs- anstelle des verwendeten messwertbasierten Verfahrens zur Ermittlung der Everett-Flächen  $F_{(\alpha,\beta)}$  die Modellgenauigkeit vermutlich erhöhen. Dies kann zu einer Reduktion des Modellfehlers beitragen, so dass lediglich der vereinfachungsbedingte Fehleranteil verbleibt.

Um eine bessere Übertragbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, sollte der Prüfstandsaufbau in zukünftigen Arbeiten um die Möglichkeit einer exakten Dehnungsmessung erweitert werden. Dann spielt die endliche Steifigkeit des Aktoraufstandspunktes keine Rolle mehr und die ermittelten Modellparameter lassen sich uneingeschränkt auf andere Einbausituationen übertragen.

Außerdem kann das Modell im Zuge der weiteren Modellvalidierung mit einem existierenden piezoaktiven System abgeglichen werden, was bisher nur Ansatzweise umgesetzt wurde [173]. Die Validierung des Modells erfolgte wie in Kapitel 8 beschrieben auf Komponentenebene. Es wurde lediglich ein modellierter Effekt simuliert und mit korrespondierenden Messwerten abgeglichen. Eine Validierung des Gesamtmodells bei gleichzeitigem Auftreten aller modellierten Effekte steht aber noch aus. So ist zur vollständigen Validierung des Modells z. B. ein Vergleich mit einem der am IMS zur Verfügung stehenden aktiv gelagerten Rotorprüfstände anzustreben.

Mit dem vorgeschlagenen Modell steht nun eine Möglichkeit zur Verfügung die sich im Betrieb einstellende Aktortemperatur zu berechnen. Dies ist jedoch lediglich der erste Schritt bei der Gestaltung eines piezoaktiven mechatronischen Systems, da zwischen Temperatur und

---

Aktorlebensdauer ein enger Zusammenhang besteht. Dieser ist jedoch unter den bei aktiver Schwingungsminderung auftretenden Belastungen noch unbekannt. Fest steht lediglich, dass erhöhte Temperaturen die Lebensdauer verkürzen [18]. Somit ist weitere Grundlagenforschung zur Lebensdauer von Piezostapelaktoren bei erhöhten Temperaturen und dynamischen elektrischen Feldern erforderlich. Erst wenn eine Lebensdauerberechnung zuverlässig möglich ist, werden piezoaktive Systeme einen breiteren Anwendungsbereich finden.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] D. Zimmerman, „Paul Langevin and the Discovery of Active Sonar or Asdic“, *The Northern Mariner*, Bd. 12, Nr. 1, 2002.
- [2] K. K. Shung, J. M. Cannata, und Q. F. Zhou, „Piezoelectric materials for high frequency medical imaging applications: A review“, *Journal of Electroceramics*, Bd. 19, Nr. 1, S. 139–145, 2007.
- [3] T. Hemsell und J. Wallaschek, „Survey of the present state of the art of piezoelectric linear motors“, *Ultrasonics*, Bd. 38, Nr. 1, S. 37–40, 2000.
- [4] K. Spanner, „Survey of the various operating principles of ultrasonic piezomotors“, gehalten auf der Actuator, Bremen, 2006.
- [5] S. Devasia, E. Eleftheriou, und S. O. R. Moheimani, „A Survey of Control Issues in Nanopositioning“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 15, Nr. 5, S. 802 – 823, Sep. 2007.
- [6] S. O. R. Moheimani, „Accurate and fast nanopositioning with piezoelectric tube scanners: Emerging trends and future challenges“, *Review of Scientific Instruments*, Bd. 79, Nr. 7, 2008.
- [7] S. Yokota und K. Hiramoto, „Ultra high-speed electrohydraulic servo valve by making use of a multilayered piezoelectric device (PZT)“, *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, B Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part B*, Bd. 57, Nr. 533, S. 182–187, 1991.
- [8] B. Christian, *Piezo-Dieseldirekteinspritzung*. Verlag Moderne Industrie, 2006.
- [9] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures : An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [10] A. Preumont, *Mechatronics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2006.
- [11] A. B. Palazzolo, R. R. Lin, A. F. Kascak, J. Montague, und R. M. Alexander, „Test and theory for piezoelectric actuator-active vibration control of rotating machinery“, in *Advances in Design Automation*, 1989, Bd. 18–1, S. 367–374.
- [12] A. B. Palazzolo, S. Jagannathan, A. F. Kascak, G. T. Montague, und L. J. Kiraly, „Hybrid Active Vibration Control of Rotorbearing Systems Using Piezoelectric Actuators“, *Journal of Vibration and Acoustics*, Bd. 115, Nr. 1, S. 111, 1993.
- [13] C. Ehmann und R. Liebich, „Piezo actuators for vibration reduction of aero engine rotors“, gehalten auf der ISCORMA-3, Cleveland, 2005.
- [14] F. Lebo, S. Rinderknecht, und M. Ozel, „Model-based control of an elastic aircraft engine rotor with piezo stack actuators“, in *2010 IEEE 17Th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, 2010, S. 537 –541.
- [15] F. Y. Zeidan, L. San Andres, und J. M. Vance, „Design and application of squeeze film dampers in rotating machinery“, in *Proceedings of the twenty-fifth turbomachinery symposium*, Houston, 1996.
- [16] C. Kaletsch, „Vergleich einer piezoelektrischen Lagerabstützung mit Quetschöldämpfern zur Schwingungsreduktion eines elastischen Rotors“, 25-Okt-2011. [Online]. Verfügbar unter: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2778/>. [Zugegriffen: 29-Nov-2012].

- 
- [17] M. S. Senousy, R. K. N. D. Rajapakse, D. Mumford, und M. S. Gadala, „Self-heat generation in piezoelectric stack actuators used in fuel injectors“, *Smart Materials and Structures*, Bd. 18, Nr. 4, S. 045008, Apr. 2009.
- [18] I. P. Lipscomb, P. M. Weaver, J. Swingler, und J. W. McBride, „The effect of relative humidity, temperature and electrical field on leakage currents in piezo-ceramic actuators under dc bias“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 151, Nr. 2, S. 179–186, Apr. 2009.
- [19] R. G. Sabat, B. K. Mukherjee, W. Ren, und G. Yang, „Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics“, *Journal of Applied Physics*, Bd. 101, Nr. 6, 2007.
- [20] K. Uchino und S. Hirose, „Loss mechanisms in piezoelectrics: How to measure different losses separately“, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Bd. 48, Nr. 1, S. 307–321, 2001.
- [21] J. Zheng, S. Takahashi, S. Yoshikawa, K. Uchino, und J. W. C. de Vries, „Heat generation in multilayer piezoelectric actuators“, *Journal of the American Ceramic Society*, Bd. 79, Nr. 12, S. 3193–3198, 1996.
- [22] M. Marszolek, *Entwicklung eines Versuchsstandes zur Untersuchung des Temperaturverhaltens piezoelektrischer Stapelaktoren*, 1. Auflage. Shaker Verlag, 2012.
- [23] A. S. Sonin und B. A. Strukow, *Einführung in die Ferroelektrizität*. Vieweg Friedr. + Sohn Ver, 1982.
- [24] B. Jaffe, W. R. Cook, und H. L. Jaffe, *Piezoelectric ceramics*. Academic Press, 1971.
- [25] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, 1990.
- [26] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: Teubner Verlag, 1910.
- [27] „IEEE Standard on Piezoelectricity“. IEEE, 1988.
- [28] K. H. Härdtl, „Electrical and mechanical losses in ferroelectric ceramics“, *Ceramics International*, Bd. 8, Nr. 4, S. 121–127, Okt. 1982.
- [29] A. Einstein, „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“, *Annalen der Physik*, Bd. 4, Nr. 49, 1916.
- [30] J. Tichý und G. Gautschi, *Piezoelektrische Messtechnik: Physikalische Grundlagen, Kraft-, Druck- und Beschleunigungsaufnehmer, Verstärker*. Springer, 1980.
- [31] A. S. Mischenko, Q. Zhang, J. F. Scott, R. W. Whatmore, und N. D. Mathur, „Giant Electrocaloric Effect in Thin-Film  $\text{PbZr}_{0.95}\text{Ti}_{0.05}\text{O}_3$ “, *Science*, Bd. 311, Nr. 5765, S. 1270–1271, März 2006.
- [32] D. Kleppner und R. J. Kolenkow, *An Introduction To Mechanics*. MIT Press, 1973.
- [33] W. P. Mason und R. N. Thurston, *Physical acoustics: principles and methods*. Academic Press, 1975.
- [34] P. Stephan, K. Schaber, K. Stephan, und F. Mayinger, *Thermodynamik: Grundlagen und technische Anwendungen Band 1: Einstoffsysteme*, 17. Aufl. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [35] I. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications*. Elsevier, 2003.
- [36] K. Carl und K. H. Härdtl, „On the origin of the maximum in the electromechanical activity in  $\text{Pb}(\text{Zr}_x\text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$  ceramics near the morphotropic phase boundary“, *physica status solidi (a)*, Bd. 8, Nr. 1, S. 87–98, 1971.

- 
- [37] S. Antebboth, *Simulation des elektromechanischen Verhaltens von PZT mit realer Domänenstruktur*. Kassel University Press, 2007.
- [38] U. Böhle, *Phänomenologische Modellierung und Finite-Elemente-Simulationen von nichtlinearen elektromechanischen Vorgängen in ferroelektrischen Materialien*. Forschungszentrum Karlsruhe, 1999.
- [39] M. Kamlah, D. Zhou, und B. Laskewitz, „Ferroelectrics: experiments, micromechanics, and constitutive modeling“, *Journal of Computer-Aided Materials Design*, Bd. 14, Nr. S1, S. 247–251, Feb. 2008.
- [40] A. Kolleck, „Einfluss der ferroelastischen Domänenschaltprozesse auf die Bruchzähigkeit und Bruchfestigkeit von BaTiO<sub>3</sub> und PZT“, 2001.
- [41] D. M. T. Fett, „Tensile and bending strength of piezoelectric ceramics“, Bd. 18, Nr. 23, S. 1899–1902, 1999.
- [42] *Piezo Nano Positioning*. Physikinstrumente GmbH, 2009.
- [43] A. Schäufele, *Ferroelastische Eigenschaften von Blei-Zirkonat-Titanat-Keramiken*. VDI-Verlag, 1996.
- [44] D. Zhou, M. Kamlah, und D. Munz, „Effects of uniaxial prestress on the ferroelectric hysteretic response of soft PZT“, *Journal of the European Ceramic Society*, Bd. 25, Nr. 4, S. 425–432, 2005.
- [45] M. Kamlah, „Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics – modeling of electromechanical hysteresis phenomena“, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Bd. 13, Nr. 4, S. 219–268, Aug. 2001.
- [46] S. Sherrit, D. B. Van Nice, J. T. Graham, B. K. Mukherjee, und H. D. Wiederick, „Domain wall motion in piezoelectric materials under high stress“, in *Proceedings of the Eighth IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics*, 1992, S. 167–170.
- [47] K. Kuhnen und P. Krejčí, „Compensation of Complex Hysteresis and Creep Effects in Piezoelectrically Actuated Systems - A New Preisach Modeling Approach.“, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Bd. 54, Nr. 3, S. 537–550, 2009.
- [48] H. Hu und R. Ben Mrad, „On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators“, *Mechatronics*, Bd. 13, Nr. 2, S. 85–94, März 2002.
- [49] M. A. Janaideh, S. Rakheja, und C.-Y. Su, „A generalized Prandtl–Ishlinskii model for characterizing the hysteresis and saturation nonlinearities of smart actuators“, *Smart Materials and Structures*, Bd. 18, Nr. 4, Apr. 2009.
- [50] B. Delibas, *Rate dependent nonlinear properties of perovskite tetragonal piezoelectric materials using a micromechanical model, Nichtlineare Eigenschaften von piezoelektrischen Materialien*. Technische Universität Kaiserslautern, 2005.
- [51] R. M. McMeeking, C. M. Landis, und S. M. A. Jimenez, „A principle of virtual work for combined electrostatic and mechanical loading of materials“, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Bd. 42, Nr. 6, S. 831–838, Juli 2007.
- [52] A. Fröhlich, *Mikromechanisches Modell zur Ermittlung effektiver Materialeigenschaften von piezoelektrischen Polykristallen*. Karlsruhe: FZKA, 2001.
- [53] C. M. Landis, „Non-linear constitutive modeling of ferroelectrics“, *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, Bd. 8, Nr. 1, S. 59–69, Jan. 2004.



- 
- [54] Y. Su und C. M. Landis, „Continuum thermodynamics of ferroelectric domain evolution: Theory, finite element implementation, and application to domain wall pinning“, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Bd. 55, Nr. 2, S. 280–305, Feb. 2007.
- [55] M. Kamlah und U. Böhle, „Finite element analysis of piezoceramic components taking into account ferroelectric hysteresis behavior“, *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 38, Nr. 4, S. 605–633, Jan. 2001.
- [56] K. Linnemann, S. Klinkel, und W. Wagner, „A constitutive model for magnetostrictive and piezoelectric materials“, *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 46, Nr. 5, S. 1149–1166, März 2009.
- [57] M. Brokate und J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*. Springer, 1996.
- [58] J. W. Macki, P. Nistri, und P. Zecca, „Mathematical Models for Hysteresis“, *SIAM Review*, Bd. 35, Nr. 1, S. 94–123, März 1993.
- [59] F. Preisach, „Über die magnetische Nachwirkung“, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Bd. 94, Nr. 5, S. 277–302, 1935.
- [60] D. H. Everett und W. I. Whitton, „A general approach to hysteresis“, *Trans. Faraday Soc.*, Bd. 48, S. 749–757, Jan. 1952.
- [61] D. H. Everett und F. W. Smith, „A general approach to hysteresis. Part 2: Development of the domain theory“, *Trans. Faraday Soc.*, Bd. 50, S. 187–197, Jan. 1954.
- [62] D. H. Everett, „A general approach to hysteresis. Part 3.—A formal treatment of the independent domain model of hysteresis“, *Trans. Faraday Soc.*, Bd. 50, S. 1077–1096, Jan. 1954.
- [63] D. H. Everett, „A general approach to hysteresis. Part 4. An alternative formulation of the domain model“, *Transactions of the Faraday Society*, Bd. 51, S. 1551, 1955.
- [64] M. A. Krasnosel'skiĭ und A. V. Pokrovskiĭ, *Systems with hysteresis*. Berlin: Springer, 1989.
- [65] T. Doong und I. Mayergoyz, „On numerical implementation of hysteresis models“, *IEEE Transactions on Magnetics*, Bd. 21, Nr. 5, S. 1853 – 1855, Sep. 1985.
- [66] I. D. Mayergoyz, „Hysteresis models from the mathematical and control theory points of view“, *Journal of Applied Physics*, Bd. 57, Nr. 8, S. 3803, 1985.
- [67] I. D. Mayergoyz und G. Friedman, „The Preisach model and hysteretic energy losses“, *Journal of Applied Physics*, Bd. 61, Nr. 8, S. 3910 – 3912, Apr. 1987.
- [68] G. Bertotti, „Energetic and Thermodynamic Aspects of Hysteresis“, *Phys. Rev. Lett.*, Bd. 76, Nr. 10, S. 1739–1742, März 1996.
- [69] G. Bertotti, V. Basso, und G. Durin, „Random free energy model for the description of hysteresis“, *Journal of Applied Physics*, Bd. 79, Nr. 8, S. 5764 – 5766, Apr. 1996.
- [70] H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik: Formeln, Tabellen, Übersichten*, 5. A. Verlag Deutsch Harri, 2004.
- [71] G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers*. Academic Pr Inc, 1998.
- [72] D. Hughes und J. Wen, „Preisach modeling of piezoceramic and shape memory alloy hysteresis“, in *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Control Applications*, 1995, S. 1086 – 1091.



- 
- [73] D. Hughes und J. Wen, „Preisach modeling and compensation for smart material hysteresis“, gehalten auf der Proceedings of SPIE, 1995, Bd. 2427, S. 50.
- [74] P. Ge und M. Jouaneh, „Tracking control of a piezoceramic actuator“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 4, Nr. 3, S. 209–216, Mai 1996.
- [75] G. Song, J. Zhao, X. Zhou, und J. A. D. Abreu-Garcia, „Tracking control of a piezoceramic actuator with hysteresis compensation using inverse Preisach model“, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Bd. 10, Nr. 2, S. 198–209, Apr. 2005.
- [76] H. Hu und R. Ben Mrad, „A discrete-time compensation algorithm for hysteresis in piezoceramic actuators“, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Bd. 18, Nr. 1, S. 169–185, Jan. 2004.
- [77] R. V. Iyer, X. Tan, und P. S. Krishnaprasad, „Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 50, Nr. 6, S. 798–810, Juni 2005.
- [78] X. Tan und O. Bennani, „Fast inverse compensation of Preisach-type hysteresis operators using field-programmable gate arrays“, in *American Control Conference*, 2008, S. 2365–2370.
- [79] H. Jung, J. Y. Shim, und D. Gweon, „Tracking control of piezoelectric actuators“, *Nanotechnology*, Bd. 12, Nr. 1, S. 14–20, März 2001.
- [80] H. Hu, H. M. S. Georgiou, und R. Ben-Mrad, „Enhancement of tracking ability in piezoceramic actuators subject to dynamic excitation conditions“, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Bd. 10, Nr. 2, S. 230–239, Apr. 2005.
- [81] T. Hegewald, „Modellierung des nichtlinearen Verhaltens piezokeramischer Aktoren“. [Online]. Verfügbar unter: <http://www.opus.ub.uni-erlangen.de/opus/volltexte/2008/875/>. [Zugegriffen: 27-Feb-2012].
- [82] E. Bassiouny, A. F. Ghaleb, und G. A. Maugin, „Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects—I. Basic equations“, *International Journal of Engineering Science*, Bd. 26, Nr. 12, S. 1279–1295, 1988.
- [83] E. Bassiouny, A. F. Ghaleb, und G. A. Maugin, „Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects—II. Poling of ceramics“, *International Journal of Engineering Science*, Bd. 26, Nr. 12, S. 1297–1306, 1988.
- [84] M. Kaltenbacher, B. Kaltenbacher, T. Hegewald, und R. Lerch, „Finite Element Formulation for Ferroelectric Hysteresis of Piezoelectric Materials“, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Bd. 21, Nr. 8, S. 773–785, Jan. 2010.
- [85] A. Sutor, S. J. Rupitsch, und R. Lerch, „A Preisach-based hysteresis model for magnetic and ferroelectric hysteresis“, *Applied Physics A*, Bd. 100, Nr. 2, S. 425–430, Aug. 2010.
- [86] F. Wolf, A. Sutor, S. J. Rupitsch, und R. Lerch, „Modeling and measurement of hysteresis of ferroelectric actuators considering time-dependent behavior“, *Procedia Engineering*, Bd. 5, S. 87–90, 2010.
- [87] F. Wolf, A. Sutor, S. J. Rupitsch, und R. Lerch, „Modeling and measurement of creep- and rate-dependent hysteresis in ferroelectric actuators“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 172, Nr. 1, S. 245–252, Dez. 2011.
- [88] F. Wolf, A. Sutor, S. J. Rupitsch, und R. Lerch, „Modeling and Measurement of Influence of Mechanical Prestress on Hysteresis of Ferroelectric Actuators“, *Procedia Engineering*, Bd. 25, Nr. 0, S. 1613–1616, 2011.

- 
- [89] F. Wolf, A. Sutor, S. J. Rupitsch, und R. Lerch, „A generalized Preisach approach for piezoceramic materials incorporating uniaxial compressive stress“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 186, Nr. 0, S. 223–229, Okt. 2012.
- [90] P. Krejčí, *Hysteresis, Convexity and Dissipation in Hyperbolic Equations*. Tokyo: Gakkotosho, 1996.
- [91] K. Kuhnen, *Kompensation komplexer gedächtnisbehafteter Nichtlinearitäten in Systemen mit aktiven Materialien: Grundlagen - Erweiterte Methoden - Anwendungen*, 1. Aufl. Shaker, 2008.
- [92] H. Janocha und K. Kuhnen, „Real-time compensation of hysteresis and creep in piezoelectric actuators“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 79, Nr. 2, S. 83–89, Feb. 2000.
- [93] W. T. Ang, F. A. Garmon, P. K. Khosla, und C. N. Riviere, „Modeling rate-dependent hysteresis in piezoelectric actuators“, in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2003, Bd. 2, S. 1975 – 1980.
- [94] U. X. Tan, T. L. Win, und W. T. Ang, „Modeling Piezoelectric Actuator Hysteresis with Singularity Free Prandtl-Ishlinskii Model“, in *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2006, S. 251 –256.
- [95] U. X. Tan, T. L. Win, C. Y. Shee, und W. T. Ang, „Rate-Dependent Hysteresis Model of Piezoelectric using Singularity Free Prandtl-Ishlinskii Model“, in *International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, 2007, S. 356 –361.
- [96] W. T. Ang, P. K. Khosla, und C. N. Riviere, „Feedforward Controller With Inverse Rate-Dependent Model for Piezoelectric Actuators in Trajectory-Tracking Applications“, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Bd. 12, Nr. 2, S. 134 –142, Apr. 2007.
- [97] U. X. Tan und F. Widjaja, „Adaptive rate-dependent feedforward controller for hysteretic piezoelectric actuator“, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 787 – 792, 2008.
- [98] Y. L. Zhang, M. L. Han, M. Y. Yu, C. Y. Shee, und W. T. Ang, „Automatic Hysteresis Modeling of Piezoelectric Micromanipulator in Vision-Guided Micromanipulation Systems“, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Bd. 17, Nr. 3, S. 547 –553, Juni 2012.
- [99] M. A. Janaideh, C.-Y. Su, und S. Rakheja, „Development of the rate-dependent Prandtl-Ishlinskii model for smart actuators“, *Smart Materials and Structures*, Bd. 17, Nr. 3, Juni 2008.
- [100] M. Al Janaideh, S. Rakheja, und C. Y. Su, „A generalized rate dependent play operator for characterizing asymmetric and symmetric hysteresis nonlinearities“, in *American Control Conference*, 2008, S. 1911 –1916.
- [101] M. Al Janaideh und P. Krejčí, „An inversion formula for a Prandtl-Ishlinskii operator with time dependent thresholds“, *Physica B: Condensed Matter*, Bd. 406, Nr. 8, S. 1528–1532, Apr. 2011.
- [102] M. Al Janaideh und P. Krejčí, „Prandtl-Ishlinskii hysteresis models for complex time dependent hysteresis nonlinearities“, *Physica B: Condensed Matter*, Bd. 407, Nr. 9, S. 1365–1367, Mai 2012.
- [103] S. Bashash und N. Jalili, „Robust Multiple Frequency Trajectory Tracking Control of Piezoelectrically Driven Micro/Nanopositioning Systems“, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Bd. 15, Nr. 5, S. 867 –878, Sep. 2007.

- 
- [104] V. Lampaert, F. Al-Bender, und J. Swevers, „A generalized Maxwell-slip friction model appropriate for control purposes“, in *Physics and Control, 2003. Proceedings. 2003 International Conference*, 2003, Bd. 4, S. 1170 – 1177 vol.4.
- [105] F. Al-Bender, V. Lampaert, und J. Swevers, „The generalized Maxwell-slip model: a novel model for friction Simulation and compensation“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 50, Nr. 11, S. 1883 – 1887, Nov. 2005.
- [106] H. M. S. Georgiou und R. B. Mrad, „Electromechanical Modeling of Piezoceramic Actuators for Dynamic Loading Applications“, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Bd. 128, Nr. 3, S. 558, 2006.
- [107] M. Goldfarb und N. Celanovic, „Behavioral implications of piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation“, in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1996, Bd. 1, S. 226 –231 vol.1.
- [108] G. S. Choi, Y. A. Lim, und G. H. Choi, „Tracking position control of piezoelectric actuators for periodic reference inputs“, *Mechatronics*, Bd. 12, Nr. 5, S. 669–684, Juni 2002.
- [109] T.-J. Yeh, S.-W. Lu, und T.-Y. Wu, „Modeling and Identification of Hysteresis in Piezoelectric Actuators“, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Bd. 128, Nr. 2, S. 189, 2006.
- [110] T.-J. Yeh, H. Ruo-Feng, und L. Shin-Wen, „An integrated physical model that characterizes creep and hysteresis in piezoelectric actuators“, *Simulation Modelling Practice and Theory*, Bd. 16, Nr. 1, S. 93–110, Jan. 2008.
- [111] M. Quant, H. Elizalde, A. Flores, R. Ramirez, P. Orta, und G. Song, „A comprehensive model for piezoceramic actuators: Modelling, validation and application“, *Smart Materials and Structures*, Bd. 18, Nr. 12, 2009.
- [112] J. Oh und D. S. Bernstein, „Semilinear Duhem Model for Rate-Independent and Rate-Dependent Hysteresis“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 50, Nr. 5, Mai 2005.
- [113] P. R. Dahl, „Solid Friction Damping of Mechanical Vibrations“, *AIAA Journal*, Bd. 14, Nr. 12, S. 1675–1682, Dez. 1976.
- [114] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, und P. Lischinsky, „A new model for control of systems with friction“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 40, Nr. 3, S. 419 –425, März 1995.
- [115] J. Swevers, F. Al-Bender, C. G. Ganseman, und T. Projogo, „An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 45, Nr. 4, S. 675 –686, Apr. 2000.
- [116] M. Ismail, F. Ikhoulane, und J. Rodellar, „The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey“, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Bd. 16, Nr. 2, S. 161–188, Feb. 2009.
- [117] T. S. Low und W. Guo, „Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis“, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Bd. 4, Nr. 4, S. 230 –237, Dez. 1995.
- [118] C.-J. Lin und S.-R. Yang, „Precise positioning of piezo-actuated stages using hysteresis-observer based control“, *Mechatronics*, Bd. 16, Nr. 7, S. 417–426, Sep. 2006.
- [119] J.-L. Ha, R.-F. Fung, und C.-S. Yang, „Hysteresis identification and dynamic responses of the impact drive mechanism“, *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 283, Nr. 3–5, S. 943–956, Mai 2005.
- [120] W. Zhu und D. Wang, „Non-symmetrical Bouc–Wen model for piezoelectric ceramic actuators“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 181, S. 51–60, Juli 2012.

- 
- [121] O. Gomis-Bellmunt, F. Ikhoulane, P. Castell-Vilanova, und J. Bergas-Jané, „Modeling and validation of a piezoelectric actuator“, *Electrical Engineering*, Bd. 89, Nr. 8, S. 629–638, Nov. 2006.
- [122] G.-R. Yu, „Adaptive PI Control of Piezoelectric Systems Using Takagi-Sugeno Fuzzy Logic“, 2006.
- [123] P. R. Dahl und R. Wilder, „Math model of hysteresis in piezo-electric actuators for precision pointing systems“, in *Proceedings of the Eighth Annual Rocky Mountain Conference*, Keystone, 1985, S. 61–88.
- [124] Q. Wang, *Piezoaktoren für Anwendungen im Kraftfahrzeug, Messtechnik und Modellierung*, 1. Aufl. Shaker, 2007.
- [125] D. C. Jiles und D. L. Atherton, „Theory of ferromagnetic hysteresis“, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Bd. 61, Nr. 1–2, S. 48–60, Sep. 1986.
- [126] D. C. Jiles und D. L. Atherton, „Theory of the magnetisation process in ferromagnets and its application to the magnetomechanical effect“, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Bd. 17, Nr. 6, S. 1265–1281, Juni 1984.
- [127] R. C. Smith und Z. Ounaies, „A Hysteresis Model for Piezoceramic Materials“, 1999.
- [128] R. C. Smith und C. L. Hom, „Domain wall model for ferroelectric hysteresis“, in *Mathematics and Control in Smart Structures*, Newport Beach, 1999, S. 150–161.
- [129] R. C. Smith und Z. Ounaies, „A Domain Wall Model for Hysteresis in Piezoelectric Materials“, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Bd. 11, Nr. 1, S. 62–79, Jan. 2000.
- [130] T. Hegewald, B. Kaltenbacher, M. Kaltenbacher, und R. Lerch, „Efficient Modeling of Ferroelectric Behavior for the Analysis of Piezoceramic Actuators“, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Bd. 19, Nr. 10, S. 1117–1129, Jan. 2008.
- [131] Wang, R., „Aktive Dämpfung mit Piezostapelaktoren unter Berücksichtigung des nichtlinearen Aktorverhaltens“, *Studienarbeit TU Darmstadt*, 2009.
- [132] X. Dang und Y. Tan, „RBF neural networks hysteresis modelling for piezoceramic actuator using hybrid model“, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Bd. 21, Nr. 1, S. 430–440, Jan. 2007.
- [133] A. Badel, J. Qiu, und T. Nakano, „A new simple asymmetric hysteresis operator and its application to inverse control of piezoelectric actuators“, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Bd. 55, Nr. 5, S. 1086–1094, Mai 2008.
- [134] S. Bashash, N. Jalili, P. Evans, und M. J. Dapino, „Recursive Memory-based Hysteresis Modeling for Solid-state Smart Actuators“, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Bd. 20, Nr. 18, S. 2161–2171, Jan. 2009.
- [135] S. B. Lang, H. L. W. Chan, K. Uchino, J. H. Zheng, Y. H. Chen, X. H. Du, J. Ryu, Y. Gao, S. Ural, S. Priya, und S. Hirose, „Loss mechanisms and high power piezoelectrics“, *Frontiers of Ferroelectricity*, S. 217–228, 2007.
- [136] S. Tashiro, M. Ikehiro, und H. Igarashi, „Influence of Temperature Rise and Vibration Level on Electromechanical Properties of High-Power Piezoelectric Ceramics“, *Japanese Journal of Applied Physics*, Bd. 36, Nr. 5B, S. 3004–3009, 1997.
- [137] A. Bejan und A. D. Kraus, *Heat Transfer Handbook*, 1. Auflage. John Wiley & Sons, 2003.
- [138] M. M. Yovanovich und W. M. Rohsenow, *Influence of Surface Roughness and Waviness Upon Thermal Contact Resistance*. Cambridge: M.I.T. Department of Mechanical Engineering, 1967.

- 
- [139] C. V. Madhusudana und L. S. Fletcher, „Contact heat transfer - The last decade“, *AIAA Journal*, Bd. 24, Nr. 3, S. 510–523, März 1986.
- [140] V. A. Ustinov, R. Kneer, F. Al-Sibai, S. G. Schulz, und E. El-Magd, „Influence of Surface Roughness on Contact Heat Transfer“, 2010, S. 305–312.
- [141] H. D. Baehr und K. Stephan, *Wärme- und Stoffübertragung*, 7. Aufl. Springer, 2010.
- [142] VDI-Gesellschaft, *VDI-Wärmeatlas*. Berlin: Springer, 2006.
- [143] F. Tetsu und U. Haruo, „Laminar natural-convective heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder“, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Bd. 13, Nr. 3, S. 607–615, März 1970.
- [144] V. Gnielinski, *Berechnung mittlerer Wärme- und Stoffübergangskoeffizienten an laminar und turbulent überströmten Einzelkörpern mit Hilfe einer einheitlichen Gleichung*. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1975.
- [145] S. W. Churchill, „A comprehensive correlating equation for laminar, assisting, forced and free convection“, *AIChE Journal*, Bd. 23, Nr. 1, S. 10–16, 1977.
- [146] J. Pritchard, R. Ramesh, und C. R. Bowen, „Time-temperature profiles of multi-layer actuators“, *Sensors and Actuators A: Physical*, Bd. 115, Nr. 1, S. 140–145, Sep. 2004.
- [147] G. A. Lesieutre, L. Fang, G. H. Koopmann, S. P. Pai, und S. Yoshikawa, „Heat generation of a piezoceramic induced-strain actuator embedded in a glass/epoxy composite panel“, S. 267–275, Mai 1996.
- [148] S. Sherrit, X. Bao, D. A. Sigel, M. J. Gradziel, S. A. Askins, B. P. Dolgin, und Y. Bar-Cohen, „Characterization of transducers and resonators under high drive levels“, in *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2001, Bd. 2, S. 1097–1100.
- [149] M. Schäfer, *Numerik im Maschinenbau*, 1. Aufl. Springer, 1999.
- [150] J. A. Nelder und R. Mead, „A Simplex Method for Function Minimization“, *Computer Journal*, Bd. 7, S. 308–313, 1965.
- [151] H. Janocha, M. Klein, und K. Kuhn, „Simultane Messung charakteristischer Kenngrößen von Piezoaktoren im Großsignalbetrieb“, *tm - Technisches Messen*, Bd. 69, S. 399, Sep. 2002.
- [152] P. Pertsch, *Das Großsignalverhalten elektromechanischer Festkörperaktoren*. Ilmenau: ISLE Verlag, 2003.
- [153] M. Nau, *Elektrische Temperaturmessung*. Fulda: JUMO GmbH & Co. KG, 2007.
- [154] T. E. Diller, „Advances in Heat Flux Measurements“, in *Advances in Heat Transfer*, Bd. 23, Elsevier, 1993, S. 279–368.
- [155] DIN EN 50324, „Piezoelektrische Eigenschaften von keramischen Werkstoffen und Komponenten“, *Beuth Verlag*, 2002.
- [156] G. E. Martin, „On the Theory of Segmented Electromechanical Systems“, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 36, Nr. 7, S. 1366, 1964.
- [157] G. E. Martin, „New Standard for Measurements of Certain Piezoelectric Ceramics“, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Bd. 35, Nr. 6, S. 925, 1963.
- [158] S. Sherrit, C. M. Jones, J. B. Aldrich, C. Blodget, X. Bao, M. Badescu, und Y. Bar-Cohen, „Multilayer piezoelectric stack actuator characterization“, 2008, Bd. 6929, S. 12.



- 
- [159] S. Rinderknecht, C. Kaletsch, F. Lebo, R. Köhler, M. Marszolek, und Z. Wang, „Aktive Schwingungsminderung im Grenzbereich“, in *VDI-Tagung Mechatronik*, Dresden, 2011, S. 253–259.
- [160] P. M. Chaplya und G. P. Carman, „Dielectric and piezoelectric response of lead zirconate–lead titanate at high electric and mechanical loads in terms of non-180° domain wall motion“, *Journal of Applied Physics*, Bd. 90, Nr. 10, S. 5278–5286, Nov. 2001.
- [161] P. Gerthsen und G. Kruger, „Coercive field in fine-grained PLZT ceramics“, *Ferroelectrics*, Bd. 11, Nr. 1, S. 489–492, 1976.
- [162] G. Kruger, „Domain wall motion concept to describe ferroelectric rhombohedral PLZT ceramics“, *Ferroelectrics*, Bd. 11, Nr. 1, S. 417–422, 1976.
- [163] R. Köhler und S. Rinderknecht, „A phenomenological approach to temperature dependent piezo stack actuator modeling“, *Sensors and Actuators A: Physical*, 2012.
- [164] F. Lebo, *Theoretische und experimentelle Analysen von Flugtriebwerksrotoren zur aktiven Schwingungsminderung mit Piezostapelaktoren*, 1., Aufl. Shaker, 2011.
- [165] E. Bassiouny und G. A. Maugin, „Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects. III. Parameter identification“, *International Journal of Engineering Science*, Bd. 27, Nr. 8, S. 975–987, 1989.
- [166] E. Bassiouny und G. A. Maugin, „Thermodynamical formulation for coupled electromechanical hysteresis effects. IV. Combined electromechanical loading“, *International Journal of Engineering Science*, Bd. 27, Nr. 8, S. 989–1000, 1989.
- [167] J. Talaq und F. Al-Basri, „Adaptive fuzzy gain scheduling for load frequency control“, *IEEE Transactions on Power Systems*, Bd. 14, Nr. 1, S. 145–150, 1999.
- [168] J. Lunze, *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*, 9., überarbeitete Aufl. 2013. Springer, 2012.
- [169] P. Wiedemann, „Identifikation thermischer Materialparameter von Piezostapelaktoren“, Bachelorthesis, TU Darmstadt, 2012.
- [170] P. Schneider und S. Parodat, „Simulationsgestützte Strukturoptimierung mit MOSCITO - Einsatz von ANSYS in einem modularen Optimierungssystem“, *17. CAD-FEM users meeting*, Sonthofen, 1999.
- [171] S. N. Kallaev, G. G. Gadzhiev, I. K. Kamilov, Z. M. Omarov, S. A. Sadykov, und L. A. Reznichenko, „Thermal properties of PZT-based ferroelectric ceramics“, *Physics of the Solid State*, Bd. 48, Nr. 6, S. 1169–1170, Juni 2006.
- [172] L. H. Feng, E. B. Rudnyi, und J. G. Korvink, „Preserving the film coefficient as a parameter in the compact thermal model for fast electrothermal simulation“, *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, Bd. 24, Nr. 12, S. 1838 – 1847, Dez. 2005.
- [173] R. Köhler, C. Kaletsch, S. Rinderknecht, und M. Marszolek, „Active Vibration Damping of Engine Rotor Considering Piezo Electric Self Heating Effects“, 2011. [Online]. Verfügbar unter: <http://tubiblio.ulb.tu-darmstadt.de/54406/>. [Zugegriffen: 27-Jan-2013].
- [174] R. Lerch, *Elektrische Messtechnik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.

---

## Anhang A Messtechnik und Kalibrierung

---

---

### Anhang A.1 Einfluss der endlichen Prüfstandssteifigkeit

---

Zur Bestimmung der Aktordehnung wird nur ein Wegsensor verwendet, welcher auf eine Sensortargetfläche gerichtet ist. Um aus dieser Wegmessung die Aktordehnung zu bestimmen, wurde ursprünglich davon ausgegangen, dass sich der Aufstandspunkt des Prüflings nicht bewegt. Der Sockel weist jedoch eine endliche Steifigkeit auf, so dass sich sowohl die Sensortargetfläche als auch der Aufstandspunkt des Aktors deformieren. Dies führt zu Fehlern bei der Messung des E-Moduls beziehungsweise bei der Messung der piezoelektrischen Nachgiebigkeitskonstanten  $s_{33}^E$  des Prüflings. Die Abweichung des gemessenen E-Moduls vom wahren E-Modul nimmt mit zunehmender Prüflingssteifigkeit zu. Um den Effekt zu quantifizieren, wurde in der Finiten Element Software Ansys ein rotationssymmetrisches Modell des Prüfstandes aufgebaut. Dieses ist in Abbildung A.1 a) dargestellt. Der Sockel ist am unteren Ende fest eingespannt. Die Prüfkraft wird in Form einer Druckkraft auf die Aufstandsfläche des Lastaktor übertragen.

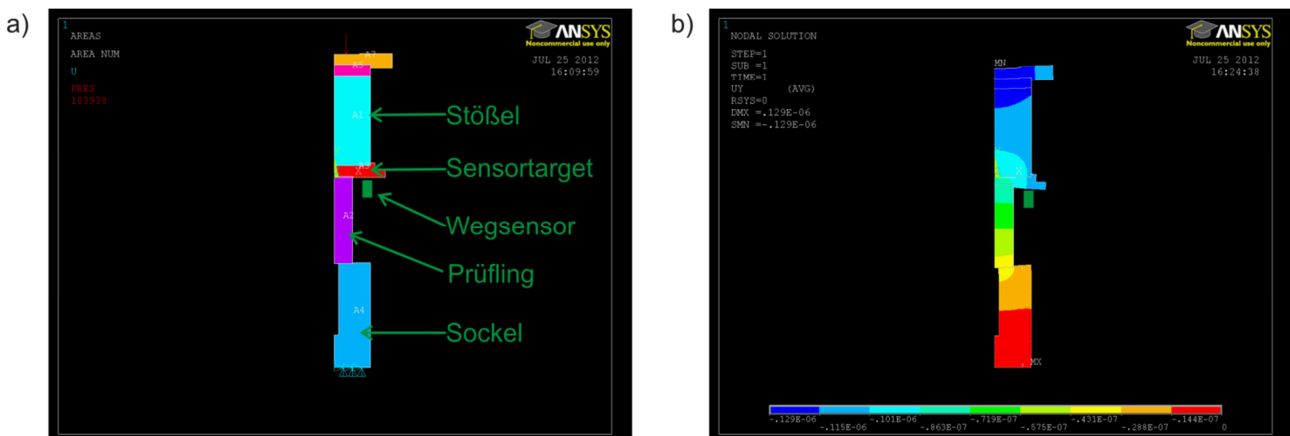


Abbildung A.1 a) 2D-Modell des Prüfstandes b) Deformation in Y-Richtung bei 100 N und 70000-facher Vergrößerung.

Ein Simulationsergebnis für einen Prüfling aus Stahl bei einer Prüfkraft von 100 N ist in Abbildung A.1 b) dargestellt. Dabei werden zwei Effekte deutlich. Da die Stößelfläche größer als die Aktorfläche ist, verbiegt sich die Sensortargetfläche. Die mit dem Wegsensor gemessene Auslenkung entspricht nicht exakt der Auslenkung der Prüflingsoberkante. Darüber hinaus gibt der Sockel unterhalb des Prüflings nach, was dazu führt, dass die Aktordehnung unterschätzt wird. In einer numerischen Parameterstudie wurden Prüflinge mit verschiedenen Steifigkeiten numerisch untersucht. Dabei wurde jeweils eine Prüfkraft von 100 N verwendet. Abbildung A.2 vergleicht die in der Simulation für den Prüfling verwendeten E-Module mit dem aus der simulierten Sensorauslenkung ermittelten E-Modul (blaue Linie). Um die FEM-Berechnungen zu validieren,

wurden am Prüfstand Messungen mit geometrisch identischen Probenkörpern mit bekanntem E-Modul aus Stahl, Messing und Bronze durchgeführt (grüne Punkte). Diese Messungen bestätigen das numerische Ergebnis.

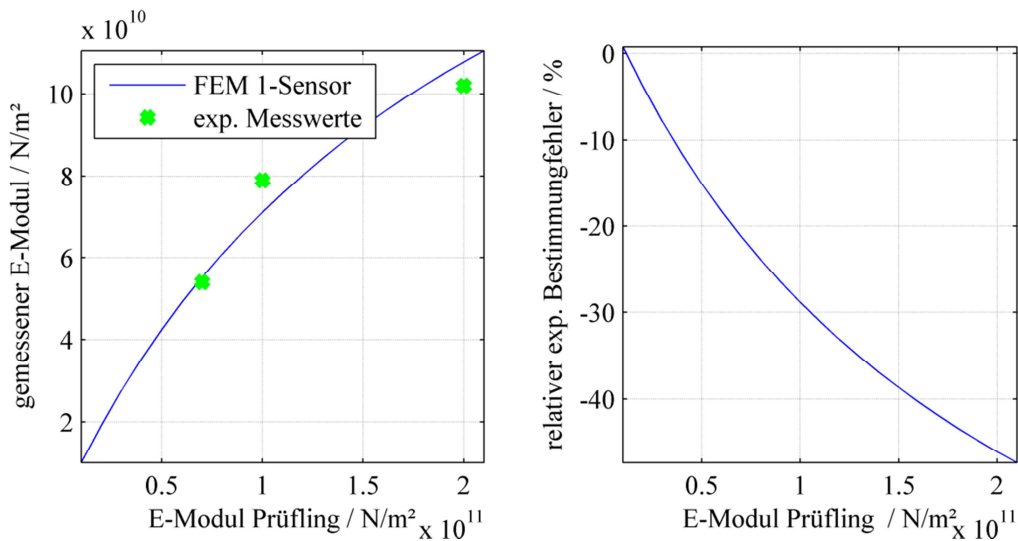


Abbildung A.2 Vergleich zwischen realem E-Modul des Prüflings und dem experimentell bestimmten E-Modul (numerische Simulation → blaue Linie, Experiment → grüne Punkte).

Aus dem Simulationsergebnis lässt sich nun eine Korrekturfunktion ableiten, welche aus dem mit den Sensordaten ermittelten E-Modul den wahren E-Modul der Probe bestimmt. Durch eine Kurvenanpassung findet sich

$$\frac{1}{s_{33}^E} = E_{kor} = p_1 E_{mess}^3 + p_2 E_{mess}^2 + p_3 E_{mess} + p_4 \quad (\text{A.1})$$

mit  $p_1 = 7,668e - 23$ ,  $p_2 = -1,647e - 12$ ,  $p_3 = 1,159$  und  $p_4 = -2.009e9$ . Mit dieser Korrekturfunktion wurden die in Kapitel 4.1 dargestellten und mit der Berlincourt Methode ermittelten linearen Kleinsignalparameter korrigiert.



---

## Anhang A.2 Kalibrierung der Temperatursensoren

---

Die Kalibrierungen der Temperatursensoren erfolgt unter Verwendung der Temperaturkammer des Prüfstandes und eines Referenzthermometers. Innerhalb der Kammer stellt sich eine sehr gleichmäßige Temperatur ein, so dass alle Sensoren sowie das Referenzthermometer der identischen Temperatur ausgesetzt sind. Die Temperatur wurde stufenweise erhöht. Nach einer Temperaturänderung wurden jeweils Haltepunkte eingelegt, so dass sich ein stationärer Zustand einstellen kann. Die Messwerte eines Aufheizvorgangs der unkalibrierten Sensoren finden sich in Abbildung Anhang A.3 links dargestellt. Bei hohen Temperaturen zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen den Thermoelementen (Messwerte:  $\Theta_{1/2}$ ,  $\Theta_{1/4}$  und  $\Theta_{amb}$ ) und den PT1000 Widerstandsthermometern (Messwert:  $\Theta_{unten}$ ). Die Abweichungen der Sensoren von der Referenztemperatur nach der Kalibrierung sind in Abbildung Anhang A.3 rechts dargestellt. Die Abweichungen von der Referenztemperatur sind stets kleiner als 0,15 °C. Zur Kalibrierung der Sensoren wurden jeweils Polynome zweiter Ordnung verwendet.

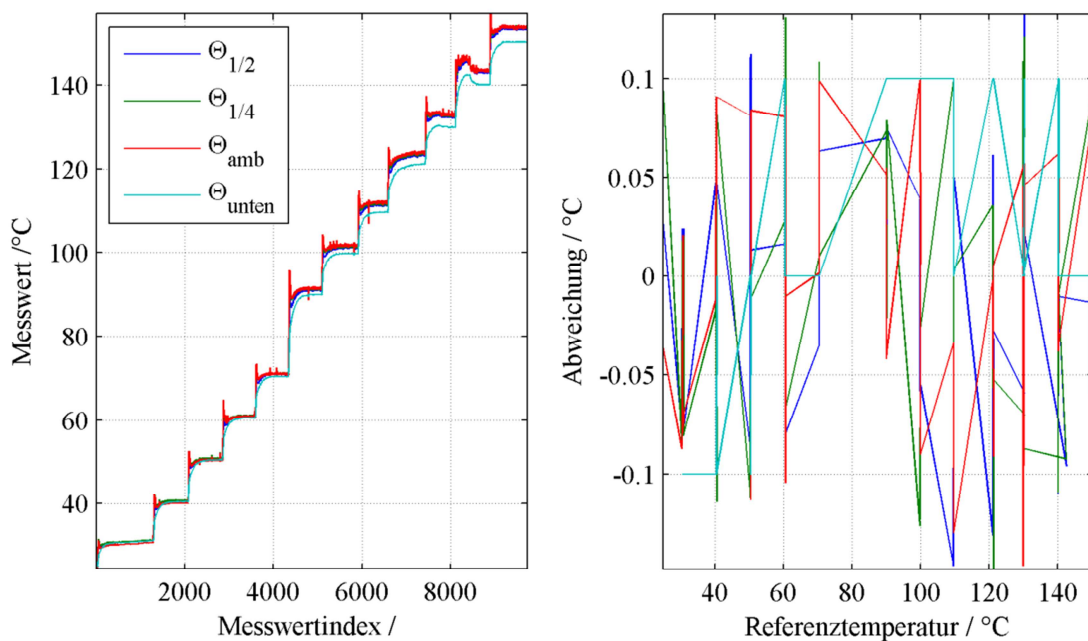


Abbildung Anhang A.3 a) Vergleich der unkalibrierten Sensoren b) Messabweichungen nach der Kalibrierung der Sensoren.

---

## Anhang A.3 Kalibrierung des Ladungsverstärkers

---

Für die Berlincourt Messung wird ein Ladungsverstärker benötigt. Die Kalibrierung dieses Verstärkers wurde mit der in Abbildung Anhang A.4 dargestellten Schaltung realisiert. Die Kalibrierschaltung wird mit einem harmonischen Spannungssignal mit Frequenzen zwischen 5 Hz und 40 Hz beaufschlagt.

Anhang Tabelle A.1 Kapazität des Messkondensators im Ladungsverstärker in Abhängigkeit von der Frequenz und der Amplitude (Gemessen mit HP 4284A).

$C_{Mess}$	0.1 V	0.5 V	1 V
20Hz	4,88729 $\mu F$	4,88692 $\mu F$	4,88684 $\mu F$
30Hz	4,88694 $\mu F$	4,88669 $\mu F$	4,88594 $\mu F$
40Hz	4,88445 $\mu F$	4,88424 $\mu F$	4,88451 $\mu F$
50Hz	4,88505 $\mu F$	4,88463 $\mu F$	4,88414 $\mu F$

Anhang Tabelle A.2 Kapazität des Eichkondensators in der Probeschaltung in Abhängigkeit von der Frequenz und der Amplitude (Gemessen mit HP 4284A).

$C_{Eich}$	0.1 V	0.5 V	1 V	2 V
20Hz	962,742 nF	962,731 nF	962,748 nF	962,905 nF
30Hz	962,782 nF	962,770 nF	962,796 nF	962,938 nF
40Hz	962,520 nF	962,596 nF	962,601 nF	962,763 nF
50Hz	962,543 nF	962,513 nF	962,524 nF	962,618 nF

Die am Ladungsverstärker gemessene Spannung ergibt sich nach [174] zu

$$U = -\frac{Q}{C_{mess}} = k_{ladung}Q \quad (A.2)$$

mit

$$k_{ladung} = -\frac{1}{C_{mess}} \quad (A.3)$$

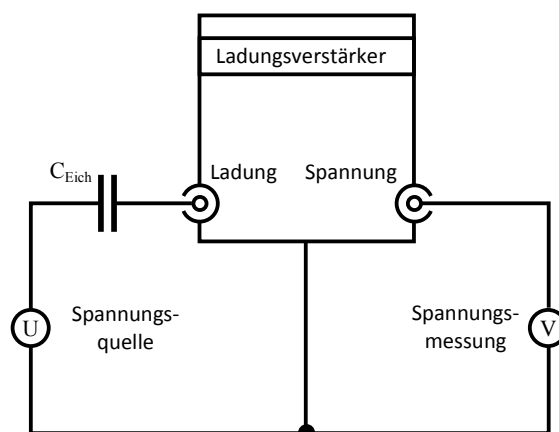


Abbildung Anhang A.4 Schaltplan zum Kalibrieren des Ladungsverstärkers.

Die am Eichkondensator anliegende Spannung entspricht der Spannung der Spannungsquelle. Dementsprechend kann aus der Spannung der Spannungsquelle und der Kapazität des Eichkondensators die Menge der bewegten Ladung ermittelt werden. Diese ist in Abbildung Anhang A.5 auf der x-Achse Aufgetragen. Das Ausgangssignal des Ladungsverstärkers ist auf der y-Achse Aufgetragen. Man erkennt, dass der Ladungsverstärker ein lineares Verhalten ausweist und dass im untersuchten Frequenzbereich keine Frequenzabhängigkeit vorliegt.

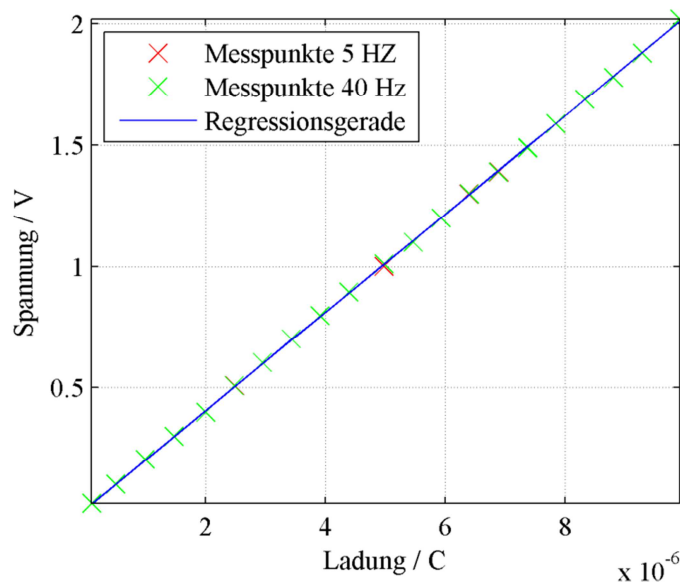


Abbildung Anhang A.5 Kalibrierkurve des Ladungsverstärkers für die Berlincourt Messung.

---

## Anhang A.4 Kalibrierung von Kraftaufnehmer, Wegsensorik & Leistungsmessung

---

Sowohl der piezoelektrisch Kraftaufnehmer (Hersteller: Firma Kistler) als auch die Positionssensoren zur Erfassung der Aktordehnung (Hersteller: Firma Micro-Epsilon) sind ab Werk von den Herstellern mit ausreichende Genauigkeit kalibriert. Deshalb konnte auf eine Nachkalibrierung verzichtet werden. Auch das zur Bestimmung der elektrischen Verlustleistung verwendet Präzisionsleistungsmessgerät vom Typ LMG 500 (Hersteller: Firma Zimmer) erfüllte die Anforderungen hinsichtlich der Messgenauigkeit ohne weitere Maßnahmen.

## Anhang B Messwerte

### Anhang B.1 Messung der Eigenerwärmung

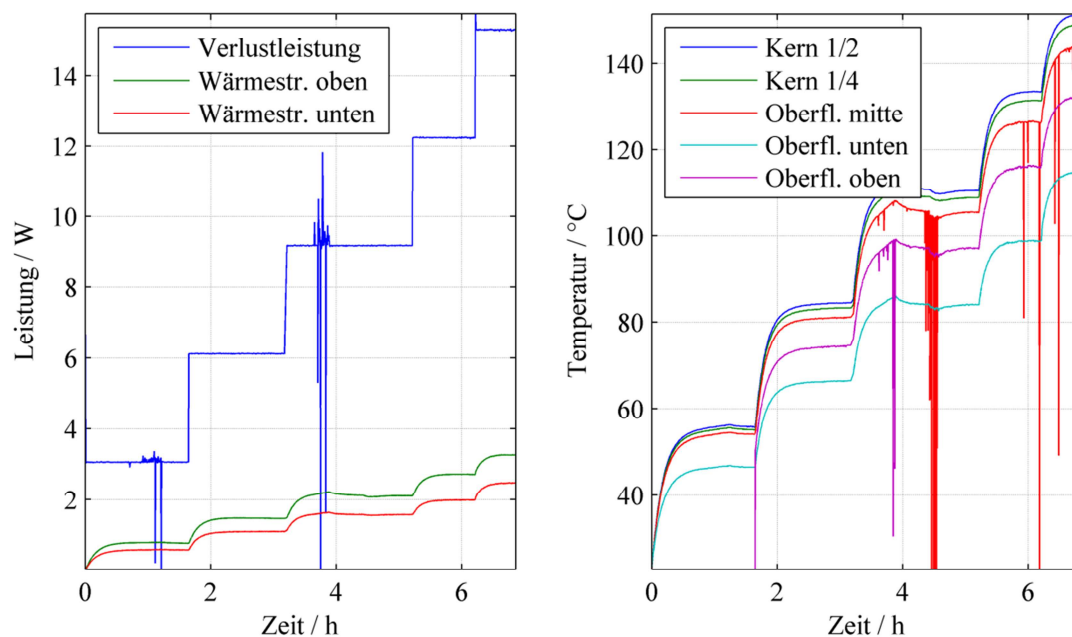


Abbildung Anhang B.1 Aufheizvorgang eines Aktors auf PIC 151 Material.

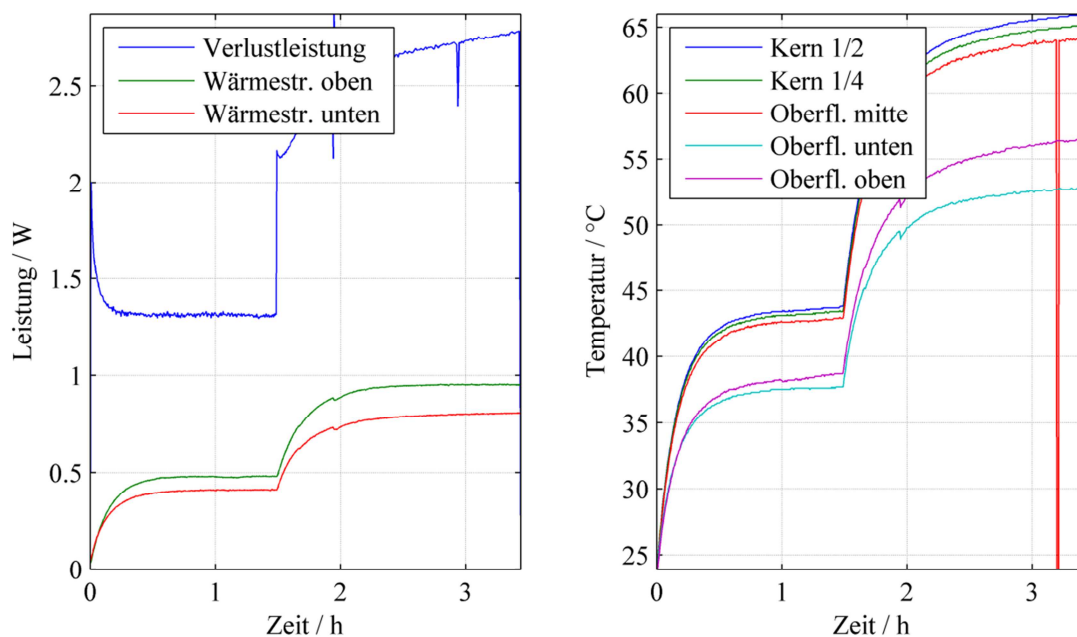


Abbildung Anhang B.2 Aufheizvorgang eines Aktors auf PIC 181 Material.

---

## Anhang C   Lebenslauf

---

### Persönliche Daten:

Name: Robert Benjamin Köhler  
Geburtsort: Darmstadt  
Geburtsdatum: 15. Mai 1982

### Schulischer Werdegang:

1988-1992 Eicheschule Ober-Ramstadt  
1992-2001 Albert-Einstein-Schule Groß-Bieberau

### Studium:

04.2002 – 01.2008 Studium des „Allgemeinen Maschinenbaus“  
an der Technischen Universität Darmstadt

02.2005 – 07.2005 Studienarbeit „Numerische Simulation des  
Staubbeutelhebelmechanismus einer Salbeiblüte“

06.2007 – 01.2008 Diplomarbeit „Berechnung und Validierung des dynamischen  
Verhaltens eines Rolls-Royce Flugtriebwerksrotors in  
Quetschöldämpfern“

### Beruflicher Werdegang:

02.2008 – 01.2013 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet  
„Institut für Mechatronische Systeme im Maschinenbau“  
der Technischen Universität Darmstadt